

Aritmetická postupnosť

Učili sme sa, že postupnosť, v ktorej je **rozdiel medzi dvomi za sebou nasledujúcimi členmi rovnaký**, sa nazýva **aritmetická postupnosť**.

Boli to napríklad postupnosti:

$$a_n = 2n + 1$$

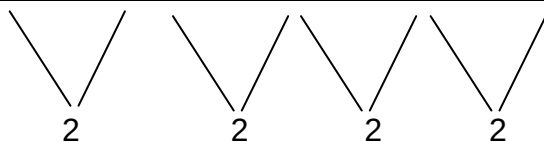
$$b_n = 3n - 4$$

$$c_n = 2 - n$$

$$d_n = \frac{1-3n}{5}$$

Ich **členy (zvyčajne 5)** sme si písali do tabuľky.

n	1	2	3	4	5
a_n	$a_1 = 3$	$a_2 = 5$	$a_3 = 7$	$a_4 = 9$	$a_5 = 11$



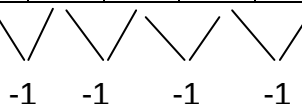
Všimli sme si, že už **tretí člen** môžeme vypočítať pomocou člena pred ním tak, že k nemu pripočítame **rozdiel (diferenciu)** medzi prvými dvomi členmi.
Diferencia medzi prvými členmi bola **$d = 2$** , a tak $a_3 = a_2 + 2$,
 $a_4 = a_3 + 2$, $a_5 = a_4 + 2$.

n	1	2	3	4	5
b_n	-1	2	5	8	11



Diferencia medzi prvými členmi je **$d = 3$** , a tak $b_3 = b_2 + 3$, $b_4 = b_3 + 3$, $b_5 = b_4 + 3$.

n	1	2	3	4	5
c_n	1	0	-1	-2	-3



Diferencia medzi prvými členmi je **$d = -1$** , a tak $c_3 = c_2 - 1$, $c_4 = c_3 - 1$, $c_5 = c_4 - 1$.

n	1	2	3	4	5
d_n	-0,4	-1	-1,6	-2,2	-2,8

Diferencia medzi prvými členmi je **$d = -0,6$** , a tak $d_3 = d_2 - 0,6$, $d_4 = d_3 - 0,6$, $d_5 = d_4 - 0,6$.

Platí:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d$$

$$a_4 = a_3 + d$$

$$a_5 = a_4 + d$$

potom všeobecne
 $a_{n+1} = a_n + d$

Úloha 1

Vypíšte prvých desať členov aritmetickej postupnosti, v ktorej:

a) $a_1 = 5$, $d = 4$,

b) $b_1 = 0,8$, $d = 0,2$,

c) $c_1 = -2$, $d = -3$,

d) $e_1 = 0,5$, $d = -0,4$.

Riešenie:

Treba vypočítať deväť členov daných postupností. Môžeme použiť predchádzajúci vzťah. Vypočítame a) a d) úlohu. Zvyšné vypočítajte samostatne.

a) Budeme počítat členy od a_2 po a_{10} .

Môžeme ich napísať do tabuľky, alebo vypísať podľa vzťahu pre jednotlivé členy.

$$a_1 = 5, d = 4$$

$$a_2 = a_1 + d = 5 + 4 = 9$$

$$a_3 = a_2 + d = 9 + 4 = 13$$

$$a_4 = a_3 + d = 13 + 4 = 17$$

$$a_5 = a_4 + d = 17 + 4 = 21$$

$$a_6 = a_5 + d = 21 + 4 = 25$$

$$a_7 = a_6 + d = 25 + 4 = 29$$

$$a_8 = a_7 + d = 29 + 4 = 33$$

$$a_9 = a_8 + d = 33 + 4 = 37$$

$$a_{10} = a_9 + d = 37 + 4 = 41$$

Prvých desať členov postupnosti je

5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41.

d) Budeme počítat členy od e_2 po e_{10} .

$$e_1 = 0,5, d = -0,4$$

$$e_2 = e_1 + d = 0,5 + (-0,4) = 0,1$$

$$e_3 = e_2 + d = 0,1 + (-0,4) = -0,3$$

$$e_4 = e_3 + d = -0,3 + (-0,4) = -0,7$$

$$e_5 = e_4 + d = -0,7 + (-0,4) = -1,1$$

$$e_6 = e_5 + d = -1,1 + (-0,4) = -1,5$$

$$e_7 = e_6 + d = -1,5 + (-0,4) = -1,9$$

$$e_8 = e_7 + d = -1,9 + (-0,4) = -2,3$$

$$e_9 = e_8 + d = -2,3 + (-0,4) = -2,7$$

$$e_{10} = e_9 + d = -2,7 + (-0,4) = -3,1$$

Prvých desať členov postupnosti je

0,1; -0,3; -0,7; -1,1; -1,5; -1,9; -2,3; -2,7; -3,1.

Ak poznáme a_1 , d , tak sme mohli prvých desať členov postupností v **úlohe 1** počítat aj takto:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$



Platí teda vzťah

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot d$$

Všimnite si:

$$\begin{array}{c} a_5 = a_1 + 4d \\ \quad \quad \quad \vee \\ \quad \quad \quad 1 + 4 = 5 \end{array}$$

Úloha 2

Vypíšte prvých sedem členov aritmetickej postupnosti, v ktorej:

a) $a_5 = 10$, $d = 4$,

b) $b_4 = 6,2$, $d = 0,8$,

c) $c_3 = -6$, $d = -2$,

d) $e_1 = 0,5$, $d = -0,1$.

Riešenie:

Treba vypočítať šesť členov daných postupností. Môžeme použiť viacero spôsobov ich výpočtu. My použijeme vzťah $a_{n+1} = a_1 + n \cdot d$, vypočítame prvý člen postupnosti a potom ostatné.

Vypočítame b) úlohu. Zvyšné vypočítajte samostatne.

b) $b_4 = 6,2$, $d = 0,8$

Pre $b_4 = 6,2$ platí vzťah: $b_4 = b_1 + 3d$.

Dosadíme známe údaje a vypočítame b_1 .

$$b_4 = b_1 + 3d$$

$$6,2 = b_1 + 3 \cdot 0,8$$

$$6,2 = b_1 + 2,4 \quad / - 2,4$$

$$3,8 = b_1$$

Ak $b_1 = 3,8$ a $d = 0,8$, potom môžeme ďalšie členy postupnosti počítať tak, ako v úlohe 1:

$$b_2 = b_1 + d = 3,8 + 0,8 = 4,6$$

$$b_3 = b_2 + d = 4,6 + 0,8 = 5,4$$

$$b_4 = b_3 + d = 5,4 + 0,8 = 6,2$$

$$b_5 = b_4 + d = 6,2 + 0,8 = 7$$

$$b_6 = b_5 + d = 7 + 0,8 = 7,8$$

$$b_7 = b_6 + d = 7,8 + 0,8 = 8,6$$

Prvých sedem členov postupnosti je

3,8; 4,6; 5,4; 6,2; 7; 7,8; 8,6.

Úloha 3

Vypíšte prvých päť členov aritmetickej postupnosti, v ktorej:

a) $a_8 = 12$, $a_{10} = 18$,

b) $b_4 = 1,5$, $b_{12} = 16$,

c) $c_3 = -10$, $c_7 = -50$,

d) $e_1 = 3,7$, $e_5 = 20$.

Riešenie:

Treba vypočítať päť členov daných postupností. Môžeme použiť viacero spôsobov ich výpočtu. My si odvodíme vzťah medzi danými členmi, vypočítame diferenciu, prvý člen postupnosti a potom ostatné.

Vypočítame c) úlohu. Zvyšné vypočítajte samostatne.

c) $c_3 = -10$, $c_7 = -50$

Odvodíme si vzťah medzi danými členmi postupnosti:

$$c_7 = c_1 + 6d = c_1 + 2d + 4d = (c_1 + 2d) + 4d = c_3 + 4d$$

Platí vzťah $c_7 = c_3 + 4d$. Do vzťahu dosadíme známe údaje a vypočítame diferenciu.

$$c_7 = c_3 + 4d$$

$$-50 = -10 + 4d \quad / +10$$

$$-40 = 4d \quad / :4$$

$$-10 = d$$

$$d = -10$$

Teraz máme viacero možností na výpočet chýbajúcich členov postupnosti.

My vypočítame prvý člen zo vzťahu pre c_3 .

$$c_3 = c_1 + 2d$$

$$-10 = c_1 + 2 \cdot (-10)$$

$$-10 = c_1 - 20 \quad / +20$$

$$10 = c_1$$

$$c_1 = 10$$

Platí $c_1 = 10$, $d = -10$, potom $c_2 = 10 + (-10) = 0$, $c_3 = 0 + (-10) = -10$,
 $c_4 = -10 + (-10) = -20$, $c_5 = -20 + (-10) = -30$.

Všimli ste si, že vo vzťahu $c_7 = c_3 + 4d$ platí:

$$3 + 4 = 7$$

Platí vzťah
 $a_s = a_r + (s - r) \cdot d$

Úloha 4

Vypíšte prvých päť členov aritmetickej postupnosti, v ktorej:

a) $a_1 + a_3 = 8$, $a_5 - a_8 = -6$, b) $b_4 + 3b_2 = 1,5$, $b_1 + b_3 - 12 = 0$,

c) $2c_3 - c_5 = -2$, $c_7 + c_4 = -5$, d) $e_{10} - 5e_5 = 20$, $e_1 + e_4 = -4$.

Riešenie:

Treba vypočítať päť členov daných postupností. Môžeme použiť viacero spôsobov ich výpočtu. My použijeme vzťah $a_{n+1} = a_1 + n \cdot d$, vypočítame diferenciu a prvý člen postupnosti a potom ostatné.

Vypočítame d) úlohu. Zvyšné vypočítajte samostatne.

d) $e_{10} - 5e_5 = 20$

$$e_1 + e_4 = -4$$

Uvedené dva vzťahy medzi členmi tvoria sústavu rovníc s viacerými neznámymi.

Ak si členy e_4, e_5, e_{10} vyjadríme pomocou e_1 a d , získame sústavu rovníc s **dvomi neznámymi**.

Platí: $e_4 = e_1 + 3d$

$$e_5 = e_1 + 4d$$

$$e_{10} = e_1 + 9d$$

Tieto vzťahy dosadíme do sústavy: $e_{10} - 5e_5 = 20$

$$e_1 + e_4 = -4$$

Dostaneme sústavu:

$$(e_1 + 9d) - 5(e_1 + 4d) = 20$$

$$e_1 + (e_1 + 3d) = -4$$

$$e_1 + 9d - 5e_1 - 20d = 20$$

$$2e_1 + 3d = -4$$

$$-4e_1 - 11d = 20$$

$$2e_1 + 3d = -4 \quad / \cdot 2$$

$$-4e_1 - 11d = 20$$

$$4e_1 + 12d = -8 \quad \text{Rovnice sčítame.}$$

$$d = 12$$

Teraz vypočítame e_1 . Pre výpočet použijeme rovnicu $2e_1 + 3d = -4$.

$$2e_1 + 3 \cdot 12 = -4$$

$$2e_1 + 36 = -4 \quad / -36$$

$$2e_1 = -40 \quad / :2$$

$$e_1 = -20$$

Poznáme $e_1 = -20$ a $d = 12$, takže ďalšie členy postupnosti budú:

$$e_2 = e_1 + d = -20 + 12 = -8$$

$$e_3 = e_2 + d = -8 + 12 = 4$$

$$e_4 = e_3 + d = 4 + 12 = 16$$

$$e_5 = e_4 + d = 16 + 12 = 28$$

Prvých päť členov postupnosti je

-20, -8, 4, 16, 28.

Želám Ti veľa úspechov pri riešení úloh o postupnostiach.