

Mocniny s celočíselným mocniteľom, operácie s mocninami.

Vyjadrenie veľkých a malých čísel pomocou mocnín čísla 10

Riešené úlohy

Väčšinu úloh môžeme dnes vypočítať pomocou kalkulačky.
Počítajte najprv bez nej a potom si výsledok kalkulačkou overte.

1. Zapište mocninou pomocou súčinu a vypočítajte jej hodnotu:

a) 12^2 b) $0,5^2$ c) $(-1,5)^2$ d) $(-32)^2$ e) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ f) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2$

Napríklad: $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$

2. Zapište mocninou pomocou súčinu a vypočítajte jej hodnotu:

a) 11^3 b) $0,02^3$ c) $(-1,3)^3$ d) $(-21)^3$ e) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ f) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$

Napríklad: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

3. Zapište mocninou pomocou súčinu a vypočítajte jej hodnotu:

a) 10^6 b) $0,1^5$ c) $(-0,01)^2$ d) $(-10)^3$ e) $\left(\frac{1}{100}\right)^4$ f) $\left(-\frac{1}{10}\right)^0$

Napríklad: $(-0,01)^2 = (-0,01) \cdot (-0,01) \cdot (-0,01) = -0,000\ 001$

*4. Vypočítajte mocninu so záporným exponentom:

a) 2^{-3} b) 4^{-2} c) 5^{-1} d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ f) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$ g) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ h) $\left(\frac{10}{3}\right)^{-3}$

Riešenie: Vypočítať mocninu so záporným mocniteľom znamená vyjadriť ju mocninou s kladným mocniteľom.

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ b) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ c) $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = \frac{16}{1} = 16$ e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{1} = 9$
f) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{125}{27}} = \frac{27}{125}$ g) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{64}{125}} = \frac{125}{64}$

Platí:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Možno ste si všimli, že v úlohách s umocňovaním zlomku záporným exponentom

„prevraciame zlomky“, platí $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$. Vypočítame si poslednú úlohu a pridáme

ešte tri ďalšie:

$$\text{h) } \left(\frac{10}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{27}{1000}$$

$$\text{i) } \left(1\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{125}{343}$$

$$\text{j) } \left(-2\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{9}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

$$\text{k) } (1,4)^{-1} = \left(\frac{14}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{10}{14}\right)^1 = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

5. Zapište uvedené čísla v tvare $a \cdot 10^n$, $1 \leq a < 10$, $n \in \mathbb{N}$:

a) 2 700 000 b) 10 500 000 c) 3 250 000 000 d) 9 807 000 000

Riešenie:

$$\text{a) } 2\,700\,000 = 2,7 \cdot 10^6$$

$$\text{b) } 10\,500\,000 = 1,05 \cdot 10^7$$

$$\text{c) } 3\,250\,000\,000 = 3,25 \cdot 10^9$$

$$\text{d) } 9\,807\,000\,000 = 9,807 \cdot 10^9$$

Všimnite si, že do mocniteľa čísla 10 píšeme rád číslice v čísle, napr. a) číslica 2 má rád milióny, tzn. píšeme 10^6 .

***6. Zapište uvedené čísla v tvare $a \cdot 10^n$, $1 \leq a < 10$, $n \in \mathbb{Z}$:**

a) 0,005 b) 0,000 63 c) 0,000 004 21 d) 0,000 000 789

Pomôcka: $0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, $0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$, $0,001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, $0,0001 = \frac{1}{10000} = 10^{-4}$

Riešenie:

$$\text{a) } 0,005 = 5 \cdot 0,001 = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{b) } 0,000\,63 = 6,3 \cdot 0,0001 = 6,3 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{c) } 0,000\,004\,21 = 4,21 \cdot 0,000001 = 4,21 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{d) } 0,000\,000\,789 = 7,89 \cdot 0,0000001 = 7,89 \cdot 10^{-7}$$

Všimnite si, že aj tu pri riešení úloh do mocniteľa čísla 10 píšeme rád číslice v čísle, napr. a) číslica 5 má rád tisíciny, tzn. píšeme 10^{-3} .

Pripomeňme si rády číslic v číslach a ich využitie:

jednotky – rád 0, píšeme 10^0	jednotky – rád 0, píšeme 10^0
desiatky – rád 1, píšeme 10^1	desatiny – rád -1, píšeme 10^{-1}
stovky – rád 2, píšeme 10^2	stotiny – rád -2, píšeme 10^{-2}
tisíciky – rád 3, píšeme 10^3	tisíciny – rád -3, píšeme 10^{-3}

7. Vypočítajte hodnotu súčiny:

a) $3 \cdot 10^6$ b) $2,7 \cdot 10^3$ c) $5,028 \cdot 10^4$ d) $9,43 \cdot 10^7$ e) $1,503 \cdot 10^5$

Napríklad: $1,503 \cdot 10^5 = 1,503 \cdot 100000 = 150300$

Pomôcka: použijeme vedomosti o násobení čísla mocninou čísla 10 (tzv. posúvanie desatinnej čiarky doprava).

*8. Vypočítajte hodnotu súčiny. Výsledok vyjadrite v tvare desatinného čísla.

a) $2 \cdot 10^{-3}$ c) $6,03 \cdot 10^{-1}$ e) $1,50 \cdot 10^{-1}$

b) $4,3 \cdot 10^{-2}$ d) $9,103 \cdot 10^{-4}$ f) $5,125 \cdot 10^0$

Napríklad: $9,103 \cdot 10^{-4} = 9,103 \cdot 0,0001 = 0,0009103$

Pomôcka: použijeme vedomosti o násobení čísla mocninou čísla 10 (tzv. posúvanie desatinnej čiarky doľava).

***9. Zjednodušte dané výrazy s mocninami. Čísla vo výsledkoch uveďte v tvare desatinného čísla.**

Platí vzorec: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (základ mocniny opíšeme a mocnitele sčítame)

a) $5r^4 \cdot (-2r^5) = -10 \cdot r^{4+5} = -10r^9$

d) $2,3v^2 \cdot (-0,01s^3) \cdot v^4 \cdot 6s^2 = 2,3 \cdot (-0,01) \cdot 6 \cdot v^{2+4} \cdot s^{3+2} = -0,138v^6s^5$

b) $(-6s^2) \cdot (-0,2s^4) = 1,2s^{2+4} = 1,2s^6$

*e) $\frac{a^7}{4} \cdot \left(-\frac{b^3}{3}\right) \cdot \frac{5a^3}{2} \cdot \frac{3b}{5} = -\frac{15a^{7+3}b^{3+1}}{120} = -\frac{15a^{10}b^4}{120} = -\frac{a^{10}b^4}{8}$

c) $(-0,1t^3) \cdot 3t^5 = -0,3t^8$

*f) $\left(\frac{-6}{5}q^2\right) \cdot \frac{14q^4}{3} \cdot \frac{10q}{7} \cdot \left(-\frac{q^0}{2}\right) = \frac{840q^{2+4+1+0}}{210} = \frac{4q^7}{1} = 4q^7$

***10. Zjednodušte dané výrazy s mocninami. Čísla vo výsledkoch uveďte v tvare desatinného čísla.**

Platí vzorec: $a^x : a^y = a^{x-y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (základ mocniny opíšeme a mocnitele

odčítame)

a) $15r^5 : 3r^4 = 5r^{5-4} = 5r$

b) $(-10s^8) : (-0,2s^3) = 50s^{8-3} = 50s^5$

c) $(-16t^3) : 8t^2 = -2t^{3-2} = -2t$

d) $2,8v^6 : (-0,7v^2) = -4v^{6-2} = -4v^4$

Platí:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

Delenie zlomkov realizujeme známym spôsobom: prvý zlomok násobíme prevrátenou hodnotou druhého zlomku.

$$\text{e) } \frac{a^5}{2} : \left(-\frac{a^3}{16}\right) = \frac{a^5}{2} \cdot \left(\frac{16}{a^3}\right) = \frac{16a^5}{2a^3} = \frac{8a^{5-3}}{1} = 8a^2$$

$$\text{f) } \left(-\frac{6}{5}q^2\right) : \left(-\frac{2}{15}q\right) = \left(-\frac{6}{5}q^2\right) \cdot \left(-\frac{15}{2q}\right) = \frac{9q^2}{q^1} = 9q^{2-1} = 9q$$

$$\text{g) } \left(-\frac{6q^5}{5q^2}\right) = -1,2q^{5-2} = -1,2q^3$$

$$\text{h) } \frac{2r^3}{3r^2} = \frac{2}{3} \cdot r^{3-2} = \frac{2}{3} \cdot r = 0,6\bar{r}$$

$$\text{i) } -\frac{0,5z^4}{0,2z^4} = -\frac{0,5}{0,2} = -2,5$$

***11. Zjednodušte dané výrazy s mocninami. Čísla vo výsledkoch uveďte v tvare desatinného čísla.**

Platí vzorec: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ (základ mocniny opíšeme a mocnitele vynásobíme)

$$\text{a) } (4r^1)^3 = (4^1 r^1)^3 = 4^{1 \cdot 3} r^{1 \cdot 3} = 4^3 r^3 = 64r^3$$

$$\text{b) } (-10s^2)^4 = (-10)^4 s^{2 \cdot 4} = 10000s^8$$

$$\text{c) } (0,1t^3)^5 = (10^{-1}t^3)^5 = 10^{-5}t^{15} = 0,00001t^{15}$$

$$\text{d) } \left(-\frac{1}{4}v^2q^4\right)^2 = \frac{1}{16}v^{2 \cdot 2}q^{4 \cdot 2} = \frac{1}{16}v^4q^8 = 0,0625v^4q^8$$

Poznámka: umocňujeme každého člena súčiny ako aj každého člena podielu.

Poznámka: V posledných úlohách neuvedieme výsledky v tvare desatinného čísla.

$$\text{e) } \left(\frac{-a^3}{3b^4}\right)^6 = \frac{a^{3 \cdot 6}}{3^6 b^{4 \cdot 6}} = \frac{a^{18}}{3^6 b^{24}}$$

$$\text{f) } \left(\frac{7q^2t^5}{2t^3q^4}\right)^7 = \frac{7^7 q^{2 \cdot 7} t^{5 \cdot 7}}{2^7 t^{3 \cdot 7} q^{4 \cdot 7}} = \frac{7^7 q^{14} t^{35}}{2^7 t^{21} q^{28}} = \frac{7^7 t^{35-21}}{2^7 q^{28-14}} = \frac{7^7 t^{14}}{2^7 q^{14}}$$

Poznámka: úloha v f) sa dá riešiť aj iným spôsobom.

Výsledok by mal byť (pokiaľ nepovieme inakšie) vyjadrený mocninami s kladným mociteľom.

***12. Zjednodušte dané výrazy s mocninami. Výsledok vyjadrite v desatinnom čísle.**

$$\text{a) } (4 \cdot 10^2) \cdot (-2 \cdot 10^3) = -8 \cdot 10^5 = -800000$$

$$\text{b) } (-2,1 \cdot 10^4) \cdot (-3 \cdot 10^4) = 6,3 \cdot 10^8 = 630000000$$

$$\text{c) } (-1,02 \cdot 10^{-2}) \cdot 5 \cdot 10^{-1} = -5,1 \cdot 10^{-3} = -5,1 \cdot 0,001 = -0,0051$$

$$\text{d) } 5 \cdot 10^{-4} \cdot (-7 \cdot 10^{-3}) = -35 \cdot 10^{-7} = -35 \cdot 0,0000001 = -0,00000035$$

$$\text{e) } \frac{1}{4} \cdot 10^{-1} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 10^3\right) = -\frac{1}{6} \cdot 10^2 = -0,1666\dots \cdot 100 = -16,\bar{6}$$

$$\text{f) } \left(\frac{-9}{5} \cdot 10^2\right) \cdot \frac{10}{3} \cdot 10^{-3} = -6 \cdot 10^{-1} = -6 \cdot 0,1 = -0,6$$

***13.** Zjednodušte dané výrazy s mocninami. Výsledok vyjadrite v tvare desatinného čísla.

$$\text{a) } (9 \cdot 10^4) : (-3 \cdot 10^3) = -3 \cdot 10^{4-3} = -3 \cdot 10^1 = -30$$

$$\text{b) } (-2,4 \cdot 10^5) : (-2 \cdot 10^2) = 1,2 \cdot 10^{5-2} = 1,2 \cdot 10^3 = 1,2 \cdot 1000 = 1200$$

$$\text{c) } (-8 \cdot 10^{-2}) : (4 \cdot 10^5) = -2 \cdot 10^{-2-5} = -2 \cdot 10^{-7} = -2 \cdot 0,0000001 = -0,0000002$$

$$\text{d) } (0,5 \cdot 10^{-4}) : (0,1 \cdot 10^{-3}) = 5 \cdot 10^{-4-(-3)} = 5 \cdot 10^{-4+3} = 5 \cdot 10^{-1} = 5 \cdot 0,1 = 0,5$$

$$\text{e) } \left(\frac{1}{5} \cdot 10^7\right) : \left(\frac{3}{10} \cdot 10^{-4}\right) = \left(\frac{1}{5} : \frac{3}{10}\right) \cdot (10^{7-(-4)}) = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3}\right) \cdot (10^{7+4}) = \frac{2}{3} \cdot 10^{11} = 0,\bar{6} \cdot 10^{11} = 0,666666666666\dots \cdot 10^{11} = 666666666666,\bar{6}$$

$$\text{f) } \left(-\frac{2}{5} \cdot 10^{-3}\right) : \left(\frac{4}{15} \cdot 10^8\right) = \left(-\frac{2}{5} : \frac{4}{15}\right) \cdot (10^{-3} : 10^8) = \left(-\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4}\right) \cdot (10^{-3-8}) = -\frac{3}{2} \cdot 10^{-11} = -1,5 \cdot 10^{-11} = -1,5 \cdot 0,00000000001 = -0,000000000015$$

***14.** Zjednodušte dané výrazy s mocninami. Výsledok vyjadrite v tvare desatinného čísla.

$$\text{a) } (3 \cdot 10^{-2})^3 = 3^3 \cdot 10^{-6} = 27 \cdot 0,000001 = 0,000027$$

$$\text{b) } (-5 \cdot 10^2)^4 = (-5)^4 \cdot (10^2)^4 = \frac{1}{5^4} \cdot 10^{-8} = 0,0016 \cdot 0,00000001 = 0,00000000016$$

$$\text{c) } (1,2 \cdot 10^{-3})^{-2} = (1,2)^{-2} \cdot (10^{-3})^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} \cdot 10^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 10^6 = \frac{25}{36} \cdot 1000000 = 694444,\bar{4}$$

$$\text{d) } (3,5 \cdot 10^2)^{-1} = (3,5)^{-1} \cdot (10^2)^{-1} = \left(\frac{35}{10}\right)^{-1} \cdot 10^{-2} = \left(\frac{10}{35}\right)^1 \cdot 0,01 = 0,002857\dots$$

$$\text{e) } \left(\frac{10^3}{10^{-1}}\right)^2 = (10^{3-(-1)})^2 = (10^4)^2 = 10^{4 \cdot 2} = 10^8 = 100000000$$

$$\text{f) } \left(\frac{10^2 \cdot 2^{-1}}{2 \cdot 10^3}\right)^{-3} = \left(\frac{2 \cdot 10^3}{10^2 \cdot 2^{-1}}\right)^3 = (2^{1-(-1)} \cdot 10^{3-2})^3 = (2^2 \cdot 10^1)^3 = 2^{2 \cdot 3} \cdot 10^{1 \cdot 3} = 2^6 \cdot 10^3 = 64000$$

***15.** Vypočítajte hodnotu číselných výrazov a výsledok zapíšte v tvare $a \cdot 10^n$, $1 \leq a < 10$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\text{a) } (2000000 \cdot 5000000) : 10^4 = (2 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^6) : 10^4 = (10 \cdot 10^{12}) : 10^4 = (10^{11}) : 10^4 = 10^{11-4} = 10^7$$

$$\text{b) } (0,003 \cdot 0,0002) : (5 \cdot 10^2) = (3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-4}) : (5 \cdot 10^2) = (6 \cdot 10^{-3+(-4)}) : (5 \cdot 10^2) = (6 \cdot 10^{-7}) : (5 \cdot 10^2) = 1,2 \cdot 10^{-7-2} = 1,2 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{c) } \frac{6200000}{20000} \cdot \frac{8000000}{7400000} = \frac{62 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^4} \cdot \frac{8 \cdot 10^6}{74 \cdot 10^5} = \frac{62 \cdot 8 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 74 \cdot 10^9} = \frac{496}{148} \cdot 10^2 = 3,351 \cdot 10^2$$

$$\text{d) } \frac{0,0005}{0,04} : \frac{0,001}{0,00002} = \frac{0,0005}{0,04} \cdot \frac{0,00002}{0,001} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^{-3}} = \frac{10 \cdot 10^{-4+(-5)}}{4 \cdot 10^{-2-(-3)}} = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^1} = \frac{10^{-9}}{4 \cdot 10^1} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-9-1} = 0,25 \cdot 10^{-10} = 2,5 \cdot 10 \cdot 10^{-10} = 2,5 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{e) } 0,0015 \cdot \frac{4000}{8000000} = 15 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} = \frac{15 \cdot 4 \cdot 10^{-4+3-6}}{8} = 7,5 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{f) } \frac{3000}{0,09} : 60000 = \frac{3 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{-2}} : (6 \cdot 10^4) = \frac{1 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{1}{6 \cdot 10^4} = \frac{1}{18} \cdot 10^{3-(-2)-4} = 0,055 \cdot 10^1 = 5,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^1 = 5,5 \cdot 10^{-1}$$

***16.** Daný súčin vyjadrite pomocou súčinu s mocninou uvedenou v zátvorke.

$$\text{a) } 4 \cdot 10^4 \quad (10^2) \quad \text{Riešenie: } 4 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 400 \cdot 10^2$$

$$\text{b) } 5 \cdot 10^5 \quad (10^3) \quad \text{Riešenie: } 5 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 500 \cdot 10^3$$

$$\text{c) } 2 \cdot 10^{-10} \quad (10^{-9}) \quad \text{Riešenie: } 2 \cdot 10^{-10} = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-9} = 0,2 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{d) } 0,3 \cdot 10^{-3} \quad (10^{-6}) \quad \text{Riešenie: } 0,3 \cdot 10^{-3} = 0,3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 300 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{e) } 0,25 \cdot 10^{-12} \quad (10^{-10}) \quad \text{Riešenie: } 0,25 \cdot 10^{-12} = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-10} = 0,0025 \cdot 10^{-10}$$

$$\text{f) } 5,2 \cdot 10^{-9} \quad (10^{-3}) \quad \text{Riešenie: } 5,2 \cdot 10^{-9} = 5,2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3} = 0,0000052 \cdot 10^{-3}$$