

Nekonečný geometrický rad

Čo si treba zopakovať ...

Zopakujeme si, čo je ... **nekonečná geometrická postupnosť**.

Zopakujeme si, ako vypočítať ... **kvocient geometrickej postupnosti**.

Potom si ukážeme **ako vzniká nekonečný geometrický rad**.

Budeme trochu zjednodušovať,

trochu experimentovať,

trochu intuitívne riešiť úlohy.

Geometrická postupnosť ako mnohé postupnosti môže byť daná radom čísel, pomocou funkčného vzťahu, pomocou n -tého člena, rekurentne pomocou prvého člena a kvocientu postupnosti.

Napríklad:

Rad čísel	Funkčný vzťah	n -tý člen	Rekurentný vzťah
1, 5, 25, 125, ...	$y = 5^{x-1}, x \in \mathbf{N}$	$a_n = 5^{n-1}$	$a_1 = 1, q = 5$

Vyriešme teraz niekoľko úloh, ktorými si geometrickú postupnosť pripomenieme.

Úloha 1 Zistite, či je daná postupnosť geometrická:

a) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

b) $b_n = 4^{1-2n}$

c) $c_n = n^2 + n$

d) $d_n = 2n^3$

Riešenie: Ukážeme si riešenie a).

Zisťovanie, či je postupnosť geometrická, sme realizovali pomocou faktu, že:

**každý nasledujúci člen geometrickej postupnosti
je násobkom predchádzajúceho člena.**

Tento násobok sme nazvali **kvocientom** a platilo $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Alebo sme zisťovali, či je:

Podiel každých dvoch za sebou nasledujúcich členov postupnosti rovnaký,

tzn. že platí $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Pre ľahšie zisťovanie násobku alebo podielu – kvocientu sme si vypísali niekoľko prvých členov postupnosti a potom sme určili kvocient, ktorý potvrdzoval, že postupnosť je geometrická.

a) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Vypočítajme si niekoľko prvých členov postupnosti, zapíšme si ich do tabuľky, z ktorej je ľahšie viditeľný podiel, či násobok medzi členmi.

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$a_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{4-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$a_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

n	1	2	3	4	5
a_n	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$

Vidieť, že každý nasledujúci člen v tabuľke vzniká **násobením** predchádzajúceho člena zlomkom $\frac{1}{3}$.

Alebo, že **podiel** dvoch za sebou nasledujúcich členov je rovnaký a je to $\frac{1}{3}$.

Keďže postupnosť je nekonečná, potrebujeme konkrétny výsledok dokázať pomocou

vzťahu pre jej členy. Použijeme alebo $a_{n+1} = a_n \cdot q$ alebo $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Určíme si členy pre oba vzťahy:

Ak $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, potom $a_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Dosadíme a_n a a_{n+1} do niektorého zo vzťahov. My si vyberáme vzťah $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\text{Potom } q = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n-1}}} = \frac{3^{n-1}}{3^n} = 3^{n-1-n} = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Hodnotu q si každý môže inak - podľa svojich vedomostí o mocninách.

Napríklad aj takto:

- Umocníme si zlomky v zátvorkách $\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot q$.
- Vynásobíme si obe strany rovnice mocninou 3^{n-1} .
- Získame $\frac{1}{3^n} \cdot 3^{n-1} = q$.
- Potom $3^{-n} \cdot 3^{n-1} = q$, teda $q = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Alebo takto:

Potrebuje len vedieť, že **mocniny s rovnakým základom delíme tak, že základ opíšeme a exponenty odčítame**.

Potom si do vzťahu $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dosadíme $\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot q$ a vyjadríme q tak, že obe strany podelíme mocninou $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

$$\text{Takže } q = \left(\frac{1}{3}\right)^n : \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-(n-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-n+1} = \frac{1}{3}.$$

Záver: Keďže existuje q také, že platí $a_{n+1} = a_n \cdot q$, postupnosť je geometrická.

Úloha 2 Vypočítajte kvocient geometrickej postupnosti:

$$\text{a) } a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \quad \text{b) } b_n = 3^{1-2n} \quad \text{c) } c_n = \frac{1}{5^{n-2}} \quad \text{d) } d_n = 4^{n+2}$$

Riešenie: Úlohu môžeme riešiť tak isto, ako úlohu 1.

Keďže postupnosť je nekonečná, pre výpočet kvocientu môžeme použiť

$$\text{alebo } a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{alebo } q = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Aby sme si boli istí, že riešenie je správne, vypočítame si hodnoty prvých členov postupnosti a potom použijeme jeden z uvedených vzťahov.

Vyriešime si úlohu b).

$$b_1 = 3^{1-2 \cdot 1} = 3^{1-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$b_2 = 3^{1-2 \cdot 2} = 3^{1-4} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$b_3 = 3^{1-2 \cdot 3} = 3^{1-6} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

Vidieť, že každý nasledujúci člen postupnosti vzniká **násobením** predchádzajúceho člena zlomkom $\frac{1}{9}$. Predpokladáme teda, že **kvocient postupnosti** bude $\frac{1}{9}$.

Určíme si členy pre vzťahy, z ktorých môžeme určiť kvocient:

$$\text{Ak } b_n = 3^{1-2n}, \text{ potom } b_{n+1} = 3^{1-2 \cdot (n+1)} = 3^{1-2n-2} = 3^{-1-2n}.$$

Dosadíme b_n a b_{n+1} do vzťahu $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

$$\text{Získame } 3^{-1-2n} = 3^{1-2n} \cdot q.$$

Obe strany podelíme mocninou 3^{1-2n} .

Potom:

$$q = 3^{-1-2n} : 3^{1-2n} = 3^{-1-2n-(1-2n)} = 3^{-1-2n-1+2n} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Záver: Dokázali sme, že $q = \frac{1}{9}$.

Ako vzniká nekonečný geometrický rad?

Vzniká z členov nekonečnej geometrickej postupnosti a to pomocou ich súčtov.

Členy nekonečného geometrického radu preto pri ich tvorbe označujeme pomocou premennej s_i , a ak je geometrická postupnosť daná pomocou a_n , potom sú:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

.....

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + + a_n$$

.....

V matematike pre **zápis nekonečného geometrického radu** používame **symbol súčtu – sumy**.

Potom za **nekonečný geometrický rad** považujeme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + + a_n +$$

Platí: $\sum_{n=1}^2 a_n = a_1 + a_2$

$$\sum_{n=1}^3 a_n = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\sum_{n=1}^4 a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \text{ atď.}$$

O **geometrickej postupnosti** vieme povedať, či je rastúca alebo klesajúca, či je ohraničená zdola, zhora,

O **nekončennom geometrickom rade** hovoríme, že môže byť **konvergentný** alebo **divergentný**.

Nekonečný geometrický rad je **konvergentný**, ak pre jeho kvocient platí:

$$|q| < 1, \text{ to znamená } -1 < q < 1.$$

Ak je nekonečný geometrický rad **konvergentný**, môžeme určiť jeho **súčet**.

Platí preň vzťah: $s = \frac{a_1}{1 - q}$.

Úloha 3 Zistite, či je daný rad geometrický.

Ak áno, zistite, či je rad konvergentný a určte jeho súčet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1-n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot 2^{3-n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \cdot 3^{n-2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-3}} \cdot 3^n$

Riešenie pozostáva z troch krokov:

1. Zistiť, či je daný rad geometrický, znamená určiť kvocient napríklad zo vzťahu

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

2. Zistiť, či je rad konvergentný, znamená zistiť, či kvocient spĺňa nerovnosť

$$-1 < q < 1.$$

3. Ak kvocient vyhovuje nerovnosti $-1 < q < 1$, určujeme súčet $s = \frac{a_1}{1-q}$.

Vyriešime úlohu d) $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot 2^{3-n}$.

Zisťujeme, či je rad geometrický, tzn. vypočítame kvocient.

$$a_n = 5 \cdot 2^{3-n}$$

$$a_{n+1} = 5 \cdot 2^{3-(n+1)} = 5 \cdot 2^{3-n-1} = 5 \cdot 2^{2-n}$$

Potom použijeme vzťah $a_{n+1} = a_n \cdot q$ a z neho:

$$q = a_{n+1} : a_n = (5 \cdot 2^{2-n}) : (5 \cdot 2^{3-n}) = 1 \cdot 2^{2-n-(3-n)} = 2^{2-n-3+n} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Keďže existuje reálne číslo q , rad je geometrický.

Platí $-1 < \frac{1}{2} < 1$, takže rad je konvergentný a môžeme určiť súčet.

$$\text{Potom } s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5 \cdot 2^{3-1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5 \cdot 2^2}{\frac{1}{2}} = \frac{20}{0,5} = 40.$$

Problémová úloha:

Porozmýšľajte, ako súvisí konvergencia geometrického radu s ohraničenosťou a monotónnosťou geometrickej postupnosti.

Želám Ti pri riešení úloh veľa trpezlivosti.
Nezabudni si zopakovať mocniny.