

PL Aritmetická postupnosť

Príprava na previerku 1.

Úlohy v previerke budú zamerané na:

1. Zisťovanie, či je postupnosť aritmetická.
2. Určovanie členov postupnosti, ak je známy prvý člen a diferenciu postupnosti.
3. Určovanie diferencie postupnosti, ak poznáme dva členy postupnosti.
4. Určovanie diferencie a prvého člena postupnosti, ak poznáme vzťahy medzi viacerými členmi postupnosti.
5. Aplikované úlohy na aritmetickú postupnosť.

1. Zistite, či je nekonečná postupnosť daná n -tým členom aritmetická:

$$a_n = 2n - 3$$

$$b_n = 0,5 - 4n$$

$$c_n = \frac{n}{4}$$

$$d_n = \frac{1-n}{5}$$

$$e_n = n^2 - 1$$

$$f_n = 2^n + 1$$

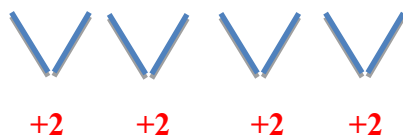
$$k_n = \frac{n}{n+3}$$

Riešenie:

Ak má byť postupnosť aritmetická, tak medzi jej za sebou nasledujúcimi dvomi členmi musí existovať **rovnaká diferenciu (rozdiel)**, vyjadrená reálnym číslom.

My si hľadanie diferencie ukážeme pomocou prvých 5 členov postupnosti.

n	1	2	3	4	5
$a_n = 2n - 3$	-1	1	3	5	7



Výpočet členov postupnosti v tabuľke realizujeme dosadením prirodzených čísel za n do n -tého člena.

$$n = 1 \quad a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

Vidíme, že rozdiel medzi **každými dvomi** za sebou idúcimi členmi je **2**.

Tvrdíme, že postupnosť je aritmetická s diferenciou **$d = 2$** a rekurentným vzorcom:

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

Tvrdenie, že diferenciu postupnosti je **$d = 2$** , by sme mali dokázať.

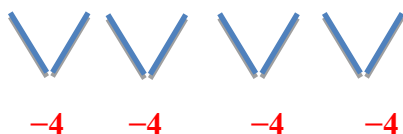
Dôkaz realizujeme pomocou n -tého člena a_n a $n+1$ -ého člena postupnosti, tzn.

$$a_n = 2n - 3 \text{ a } a_{n+1} = 2 \cdot (n+1) - 3.$$

Diferencia je rozdiel, preto členy odpočítame:

$$d = a_{n+1} - a_n = [2 \cdot (n+1) - 3] - [2n - 3] = 2n + 2 - 3 - 2n + 3 = 2$$

n	1	2	3	4	5
$b_n = 0,5 - 4n$	-3,5	-7,5	-11,5	-15,5	-19,5



Výpočet členov postupnosti v tabuľke realizujeme dosadením prirodzených čísel za n do n -tého člena.

$$n = 1 \quad b_1 = 0,5 - 4 \cdot 1 = -3,5$$

Vidíme, že rozdiel medzi **každými dvomi** za sebou idúcimi členmi je -4 .

Tvrdíme, že postupnosť je aritmetická s diferenciou $d = -4$ a rekurentným vzorcom:

$$b_1 = -3,5; \quad b_{n+1} = b_n - 4.$$

Tvrdenie, že diferencia postupnosti je $d = -4$, by sme mali dokázať.

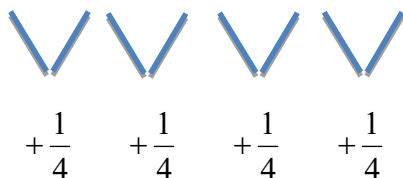
Dôkaz realizujeme pomocou n -tého člena a $n+1$ -ého člena postupnosti, tzn.

$$b_n = 0,5 - 4n \text{ a } b_{n+1} = 0,5 - 4 \cdot (n+1).$$

Diferencia je rozdiel, preto členy odpočítame:

$$d = b_{n+1} - b_n = [0,5 - 4 \cdot (n+1)] - [0,5 - 4n] = 0,5 - 4n - 4 - 0,5 + 4n = -4$$

n	1	2	3	4	5
$c_n = \frac{n}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$



Vidíme, že rozdiel medzi **každými dvomi** za sebou idúcimi členmi je $\frac{1}{4}$.

Tvrdíme, že postupnosť je aritmetická s diferenciou $d = \frac{1}{4}$ a rekurentným vzorcom:

$$c_1 = \frac{1}{4}; c_{n+1} = c_n + \frac{1}{4}.$$

Tvrdenie, že diferencia postupnosti je $d = \frac{1}{4}$, by sme mali dokázať.

Dôkaz realizujeme pomocou n -tého člena a $n+1$ -ého člena postupnosti, tzn.

$$c_n = \frac{n}{4} \text{ a } c_{n+1} = \frac{n+1}{4}.$$

Diferencia je rozdiel, preto členy odpočítame:

$$d = c_{n+1} - c_n = \frac{n+1}{4} - \frac{n}{4} = \frac{n+1-n}{4} = \frac{1}{4}$$

n	1	2	3	4	5
$d_n = \frac{1-n}{5}$	$\frac{0}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$



$$-\frac{1}{5} \quad -\frac{1}{5} \quad -\frac{1}{5} \quad -\frac{1}{5}$$

Tvrdíme, že postupnosť je aritmetická s diferenciou $d = -\frac{1}{5}$ a rekurentným vzorcom:

$$d_1 = \frac{0}{5} = 0; d_{n+1} = d_n - \frac{1}{5}.$$

Tvrdenie, že diferencia postupnosti je $d = -\frac{1}{5}$, by sme mali dokázať.

Dôkaz realizujeme pomocou n -tého člena a $n+1$ -ého člena postupnosti, tzn.

$$d_n = \frac{1-n}{5} \text{ a } d_{n+1} = \frac{1-(n+1)}{5}.$$

Diferencia je rozdiel, preto členy odpočítame:

$$d = d_{n+1} - d_n = \frac{1-(n+1)}{5} - \frac{1-n}{5} = \frac{1-n-1-1+n}{5} = -\frac{1}{5}$$

V predchádzajúcich postupnostiach sme mali vo výraze pre n -tý člen dvojčleny prvého stupňa, zjednodušene povediac „**lineárne**“.

Preto môžeme predpokladať, že posledné tri postupnosti nebudú aritmetické.

Dokážeme si to pomocou rozdielu $n+1$ -ého a n -tého člena postupnosti.

Rozdiel musí byť reálne číslo rôzne od nuly.

$$e_n = n^2 - 1$$

Riešenie:

Určíme si n -tý člen a $n+1$ -ý člen:

$$e_n = n^2 - 1$$

$$e_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = (n+1) \cdot (n+1) - 1 = n^2 + n + n + 1 - 1 = n^2 + 2n$$

Potom použijeme vzťah pre diferenciu:

$$d = e_{n+1} - e_n = (n^2 + 2n) - (n^2 - 1) = n^2 + 2n - n^2 + 1 = 2n + 1$$

Diferencia má byť **reálne číslo, nemôže obsahovať neznámu**.

Pre danú postupnosť preto diferencia neexistuje, postupnosť **nie je aritmetická**.

$$f_n = 2^n + 1$$

Riešenie:

Určíme si n -tý člen a $n+1$ -ý člen:

$$f_n = 2^n + 1$$

$$f_{n+1} = 2^{n+1} + 1 = 2^n \cdot 2^1 + 1 = 2 \cdot 2^n + 1$$

Potom použijeme vzťah pre diferenciu:

$$d = f_{n+1} - f_n = (2 \cdot 2^n + 1) - (2^n + 1) = 2 \cdot 2^n + 1 - 2^n - 1 = 1 \cdot 2^n = 2^n$$

Diferencia má byť **reálne číslo, nemôže obsahovať neznámu**.

Pre danú postupnosť preto diferencia neexistuje, postupnosť **nie je aritmetická**.

$$k_n = \frac{n}{n+3}$$

Riešenie:

Určíme si n -tý člen a $n+1$ -ý člen:

$$k_n = \frac{n}{n+3}$$

$$k_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+1)+3} = \frac{n+1}{n+4}$$

Potom použijeme vzťah pre diferenciu:

$$d = k_{n+1} - k_n = \frac{n+1}{n+4} - \frac{n}{n+3} = \frac{(n+1) \cdot (n+3) - n \cdot (n+4)}{(n+4) \cdot (n+3)} = \frac{n^2 + 4n + 3 - n^2 - 4n}{(n+4) \cdot (n+3)} = \frac{3}{(n+4) \cdot (n+3)}$$

Diferencia má byť **reálne číslo, nemôže obsahovať neznámu**.

Pre danú postupnosť preto diferencia neexistuje, postupnosť **nie je aritmetická**.

Milé študentky a študenti.

Ďalšie úlohy budú pokračovať zajtra.

Testy vhodné na opakovanie postupností nájdete na stránke Gymnázia Moldava a vysvetľovanie pojmov je podľa mňa dobre spracované na stránke www.galeje.sk.