

PL Aritmetická postupnosť

Príprava na previerku 2.

Úlohy v previerke budú zamerané na:

1. Zisťovanie, či je postupnosť aritmetická – Príprava na previerku 1.
2. Určovanie členov postupnosti, ak je známy prvý člen a diferenciacia postupnosti.
3. Určovanie diferencie postupnosti, ak poznáme dva členy postupnosti.
4. Určovanie diferencie a prvého člena postupnosti, ak poznáme vzťahy medzi viacerými členmi postupnosti.
5. Aplikované úlohy na aritmetickú postupnosť.

V tejto časti pracovného listu si ukážeme riešenie úloh z bodu 2. a 3.

2. Určovanie členov postupnosti, ak je známy prvý člen a diferenciacia postupnosti.

Určte prvých desať členov aritmetickej postupnosti, ktorá je daná diferenciou **d** a **prvým členom**.

- $d = 2$, $a_1 = 3$

Riešenie: pre aritmetickú postupnosť platí, že každý nový člen sa tvorí z predchádzajúceho člena pridaním diferencie.

Ak si riešenie zapíšeme do tabuľky (je to prehľadnejšie), potom prvých desať členov bude:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	3	$3+2$ = 5	$5+2$ = 7	$7+2$ = 9	$9+2$ = 11	$11+2$ = 13	$13+2$ = 15	$15+2$ = 17	$17+2$ = 19	$19+2$ = 21

$a_1 = 3$ $a_2 = a_1 + 3$ $a_3 = a_2 + 3$ $a_4 = a_3 + 3$ $a_5 = a_4 + 3$ $a_6 = a_5 + 3$

- $d = -0,4$, $b_1 = 1,8$

Riešenie: každý nový člen vytvoríme z predchádzajúceho člena pridaním diferencie. Vypočítané členy zapíšeme do tabuľky (je to prehľadnejšie).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	-0,4	1,4	3,2	5	6,8	8,6	10,4	12,2	14	15,8

$b_1 = -0,4$ $b_2 = b_1 + 1,8$ $b_3 = b_2 + 1,8$ $b_4 = b_3 + 1,8$ $b_5 = b_4 + 1,8$ $b_6 = b_5 + 1,8$

- $d = \frac{1}{3}, c_1 = \frac{1}{6}$

Riešenie: každý nový člen vytvoríme z predchádzajúceho člena pridaním diferencie.

Vypočítané členy zapíšeme do tabuľky.

Keďže pracujeme so zlomkami, výpočty jednotlivých členov si radšej zapíšeme. Ak pracujeme s kalkulačkou, je to jednoduchšie.

$$c_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$c_6 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9+2}{6} = \frac{11}{6}$$

$$c_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$c_7 = \frac{11}{6} + \frac{1}{3} = \frac{11+2}{6} = \frac{13}{6}$$

$$c_4 = \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5+2}{6} = \frac{7}{6}$$

$$c_8 = \frac{13}{6} + \frac{1}{3} = \frac{13+2}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

$$c_5 = \frac{7}{6} + \frac{1}{3} = \frac{7+2}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$c_9 = \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{15+2}{6} = \frac{17}{6}$$

$$c_{10} = \frac{17}{6} + \frac{1}{3} = \frac{17+2}{6} = \frac{19}{6}$$

Výsledky môžeme zapísať do tabuľky.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{19}{6}$

- $d = x, a_1 = -3x + 2$

Riešenie: každý nový člen vytvoríme z predchádzajúceho člena pridaním diferencie.

Keďže pracujeme s neznámou, je vhodné zopakovať si početové operácie s výrazmi (mnohočlenmi).

$$a_1 = -3x + 2$$

$$a_6 = x + 2 + x = 2x + 2$$

$$a_2 = -3x + 2 + x = -2x + 2$$

$$a_7 = 2x + 2 + x = 3x + 2$$

$$a_3 = -2x + 2 + x = -x + 2$$

$$a_8 = 3x + 2 + x = 4x + 2$$

$$a_4 = -x + 2 + x = 2$$

$$a_9 = 4x + 2 + x = 5x + 2$$

$$a_5 = 2 + x = x + 2$$

$$a_{10} = 5x + 2 + x = 6x + 2$$

Výsledky teraz nebudeme zapisovať do tabuľky.

- Vypočítame si teraz 10 prvých členov postupnosti, ak poznáme napríklad tretí člen postupnosti a diferenciu.

Nech sa tretí člen aritmetickej postupnosti rovná $a_3 = 10$ a nech je jej diferencia $d = 3$.

Vidíme, že členy za tretím členom vypočítame jednoducho **pridaním** diferencie k predchádzajúcemu členu:

n	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	$a_3 = 10$	13	16	19	22	25	28	31

Prvý a druhý člen zas vypočítame, keď **odpočítame** od predchádzajúceho člena diferenciu.

n	1	2	3
a_n	4	7	$a_3 = 10$

Potom je **úplná odpoveď** zapísaná do tabuľky táto:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	4	7	$a_3 = 10$	13	16	19	22	25	28	31

Poznámka: úlohy podobného typu nájdete v zbierke 2 na str. 73.

3. Určovanie diferencie postupnosti, ak poznáme dva členy postupnosti.

Najprv začneme úlohami, v ktorých budeme poznať dva za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti.

✓ **Vypočítajte diferenciu** postupnosti, v ktorej $a_1 = 5$ a $a_2 = 7$.

Riešenie: vieme, že druhý člen postupnosti vypočítame tak, že k prvému členu pridáme diferenciu (rozdiel).

Vidíme, že rozdiel medzi členmi je 2, tzn. $d = 2$.

Zápis riešenia úlohy môže byť nasledujúci:

$$d = a_2 - a_1 = 7 - 5 = 2.$$

✓ **Vypočítajte diferenciu** postupnosti, v ktorej $a_7 = -12$ a $a_8 = -15$.

Riešenie: vieme, že ôsmy člen vypočítame tak, že k siedmemu (predchádzajúcemu) členu pridáme diferenciu (rozdiel).

Vidíme, že rozdiel medzi členmi je -3 , tzn. $d = -3$.

Zápis riešenia úlohy je nasledujúci:

$$d = a_8 - a_7 = -15 - (-12) = -15 + 12 = -3.$$

✓ **Vypočítajte diferenciu** postupnosti, v ktorej $a_{135} = 3x + 4$ a $a_{136} = 12x - 15$.

Riešenie: vieme, že 136-y člen vypočítame tak, že k 135-emu (predchádzajúcemu) členu pridáme diferenciu (rozdiel).

Vidíme, že rozdiel medzi členmi je $9x - 19$, tzn. $d = 9x - 19$.

Ak tento rozdiel nie je zrejмый, použijeme výpočet:

$$d = a_{136} - a_{135} = (12x - 15) - (3x + 4) = 12x - 15 - 3x - 4 = 9x - 19$$

Teraz budeme pokračovať úlohami, v ktorých budeme poznať dva rôzne členy aritmetickej postupnosti.

✓ **Vypočítajte diferenciu** postupnosti, v ktorej $a_1 = 5$ a $a_3 = 9$.

Riešenie: vieme, že tretí člen postupnosti počítame pomocou druhého člena a **diferencie** a druhý člen pomocou prvého člena a **diferencie**. Takže **medzi prvým a tretím členom sú dve diferencie**. Použijeme tento vzťah. Zapišeme si ho: $a_3 = a_1 + 2d$.

Z tohto vzťahu vieme vyjadriť diferenciu viacerými spôsobmi.

Môžeme riešiť lineárnu rovnicu:

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$\text{Pre } d \text{ platí } d = \frac{a_3 - a_1}{2}.$$

$$9 = 5 + 2d \quad / -5$$

$$4 = 2d \quad / :2$$

$$2 = d$$

Diferencia aritmetickej postupnosti je $d = 2$.

Poznámka: diferenciu vieme častokrát určiť „vhl'adom do úlohy“.

Vtedy je zápis riešenia úlohy $d = (9 - 5) : 2 = 2$.

✓ **Vypočítajte diferenciu postupnosti, v ktorej $a_4 = -6$ a $a_9 = -20$.**

Riešenie: vieme, že medzi štvrtým a deviatym členom postupnosti je **5 diferencií**, lebo piaty člen vypočítame ako štvrtý člen a **diferencia**, šiesty člen ako piaty člen a **diferencia**, siedmy člen ako šiesty člen a **diferencia**, ôsmy člen ako siedmy člen a **diferencia**, deviaty člen ako ôsmy člen a **diferencia**.

Použijeme tento vzťah a zapíšeme si ho: $a_9 = a_4 + 5d$.

Diferenciu si z neho vypočítame dosadením hodnôt za členy postupnosti.

$$a_9 = a_4 + 5d$$

$$\text{Pre } d \text{ platí } d = \frac{a_9 - a_4}{5}.$$

$$-20 = -6 + 5d \quad / +6$$

$$-14 = 5d \quad / :5$$

$$-2,8 = d$$

Diferencia aritmetickej postupnosti je $d = -2,8$.

Poznámka: diferenciu vieme určiť aj „vhl'adom do úlohy“.

Vtedy je zápis riešenia úlohy $d = (-20 - (-6)) : 5 = -2,8$.

Všimnite si, že platí:

$$a_2 = a_1 + 1d$$

$$a_3 = a_1 + 2d = a_2 + 1d$$

$$a_4 = a_1 + 3d = a_2 + 2d = a_3 + 1d$$

$$a_5 = a_1 + 4d = a_2 + 3d = a_3 + 2d = a_4 + 1d \dots\dots\dots$$

Milé študentky a študenti.
Ďalšie úlohy budú pokračovať zajtra.

Testy vhodné na opakovanie postupností nájdete na stránke Gymnázia Moldava
a vysvetľovanie pojmov je podľa mňa dobre spracované na stránke www.galeje.sk.

Na www.kolbi.wbl.sk sú ďalšie úlohy, ako aj v zbierke 2/str. 73-74.