

Druhá mocnina dvojčlena a mnohočlena

Mali by sme vedieť, že:

- **dvojčlen** je mnohočlen s **dvomi** členmi napríklad: $2x^3 + 4x$
- **trojčlen** je mnohočlen s **tromi** členmi napríklad: $2x^3 + 4x + 5$
- **štvorčlen** je mnohočlen so **štyrmi** členmi napríklad: $2x^3 - x^2 + 4x + 5$
-

Okrem toho by sme mali vedieť, že:

„druhá mocnina znamená dvakrát to isté“.

Napríklad:

$$3^2 = 3 \cdot 3$$
$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4)$$
$$(5x)^2 = (5x) \cdot (5x)$$
$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 = \left(\frac{x}{5}\right) \cdot \left(\frac{x}{5}\right)$$

Potom aj:

„druhá mocnina dvojčlena sa rovná súčinu dvoch rovnakých dvojčlenov“.

Napríklad:

$$(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3)$$
$$(y - 1)^2 = (y - 1) \cdot (y - 1)$$
$$(2a + 6)^2 = (2a + 6) \cdot (2a + 6)$$
$$\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(b - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(b - \frac{2}{3}\right)$$

Potom aj:

„druhá mocnina mnohočlena sa rovná súčinu dvoch rovnakých mnohočlenov“.

Napríklad:

$$(a + b - 1)^2 = (a + b - 1) \cdot (a + b - 1)$$
$$(2x - y + 3)^2 = (2x - y + 3) \cdot (2x - y + 3)$$
$$(R^2 - 2R + 5)^2 = (R^2 - 2R + 5) \cdot (R^2 - 2R + 5)$$

A teraz ostáva len roznásobiť zátvorky, čo by sme mali už tiež vedieť.

Vyriešime si úlohy z predchádzajúcej strany a potom si ukážeme ako sa tieto úlohy dajú riešiť „rýchlejšie“.

Príklad 1 Určte druhú mocninu dvojčlenov.

a) $(x + 3)^2$

b) $(y - 1)^2$

c) $(2a + 6)^2$

d) $\left(b - \frac{2}{3}\right)^2$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \text{a) } (x + 3)^2 &= (x + 3) \cdot (x + 3) = \\ &= (x + 3) \cdot x + (x + 3) \cdot 3 = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$



Prvú zátvorku $(x + 3)$ násobíme najprv x – om z druhej (takej istej) zátvorky, a potom túto prvú zátvorku násobíme 3 z druhej (takej istej) zátvorky.

b)

$$(y - 1)^2 = (y - 1) \cdot (y - 1) = (y - 1) \cdot y + (y - 1) \cdot (-1) = y^2 - y - y + 1 = y^2 - 2y + 1$$

c)

$$(2a + 6)^2 = (2a + 6) \cdot (2a + 6) = 4a^2 + 12a + 12a + 36 = 4a^2 + 24a + 36$$

d)

$$\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(b - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(b - \frac{2}{3}\right) = b^2 - \frac{2b}{3} - \frac{2b}{3} + \frac{4}{9} = b^2 - \frac{4b}{3} + \frac{4}{9}$$

Teraz si ukážeme ako sa tieto úlohy dajú riešiť „rýchlejšie“.

Všimnite si nasledujúce tabuľky. Nájdete v nich vzorec pre „rýchlejšie“ počítanie.

Úloha	Výsledok úlohy	Platný vzťah
$(x + 3)^2$	$x^2 + 6x + 9$	$(x)^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + (3)^2$
$(A + B)^2$	vzorec	$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$
$(2a + 6)^2$	$4a^2 + 24a + 36$	$(2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 6 + (6)^2$

Úloha	Výsledok úlohy	Platný vzťah
$(y-1)^2$	$y^2 - 2y + 1$	$(y)^2 - 2 \cdot 1 \cdot y + (1)^2$
$(A-B)^2$	vzorec	$A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$
$\left(b - \frac{2}{3}\right)^2$	$b^2 - \frac{4b}{3} + \frac{4}{9}$	$b^2 - \frac{4b}{3} + \frac{4}{9}$

Teraz vypočítame niekoľko úloh **len pomocou vzorcov**.
 Vy si ich prepočítajte aj pomocou roznásobenia zátvoriek.

Príklad 2 Určte druhú mocninu dvojčlenov.

- a) $(x+5)^2$ b) $(3a+7)^2$ c) $\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{4}\right)^2$ d) $(0,3b+0,4)^2$
- e) $(x-7)^2$ f) $\left(3b - \frac{2}{3}\right)^2$ g) $\left(\frac{a}{5} - \frac{b}{2}\right)^2$ h) $(1,2y - 0,5x)^2$

Riešenie:

Vyriešime úlohy c), d), f). Ďalšie úlohy si vyriešte samostatne.

$$c) \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{2y}{8} + \frac{1}{16} = \frac{y^2}{4} + \frac{y}{4} + \frac{1}{16}$$

$(A+B)^2$ $A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ zlomok vykrátime 2

$$d) (0,3b+0,4)^2 = (0,3b)^2 + 2 \cdot 0,3b \cdot 0,4 + (0,4)^2 = 0,09b^2 + 0,24b + 0,16$$

$(A+B)^2$ $A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$

$$f) \left(3b - \frac{2}{3}\right)^2 = (3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9b^2 - \frac{12b}{3} + \frac{4}{9} = 9b^2 - 4b + \frac{4}{9}$$

$(A-B)^2$ $A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$ zlomok vykrátime 3

Vidíme, že **použitie vzorcov v týchto úlohách urýchľuje** umocňovanie.

Cvičenie 2.1 Určte druhú mocninu dvojčlenov.

a) $(x + 8)^2$ b) $(x + 7)^2$ c) $(y + 4)^2$ d) $(2 + y)^2$
e) $(2x + 3)^2$ f) $(4x + 5)^2$ g) $(1 + 3x)^2$ h) $(4 + 4y)^2$

Cvičenie 2.2 Určte druhú mocninu dvojčlenov.

a) $(x - 8)^2$ b) $(x - 7)^2$ c) $(y - 4)^2$ d) $(2 - y)^2$
e) $(2x - 3)^2$ f) $(4x - 5)^2$ g) $(1 - 3x)^2$ h) $(4 - 4y)^2$

Cvičenie 2.3 Určte druhú mocninu dvojčlenov.

a) $\left(x + \frac{8}{7}\right)^2$ b) $\left(\frac{x}{3} + 7\right)^2$ c) $\left(\frac{y}{2} + \frac{4}{5}\right)^2$ d) $\left(\frac{2}{5} + \frac{y}{10}\right)^2$
e) $\left(2x - \frac{1}{8}\right)^2$ f) $\left(\frac{x}{4} - 0,5\right)^2$ g) $\left(\frac{y}{3} - \frac{2}{5}\right)^2$ h) $\left(\frac{4}{9} - \frac{y}{4}\right)^2$

Príklad 3 Vypočítajte druhé mocniny.

a) $(x^2 + x + 1)^2$ b) $(R - R^3 + 2)^2$ c) $\left(-3 + a - \frac{a^4}{3}\right)^2$

Riešenie:

Druhé mocniny trojčlenov vypočítame najprv ako **súčin rovnakých činiteľov** a potom si ukážeme aj **riešenie podľa vzorca** $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$.

a) Riešenie súčinom:

$$\begin{aligned}(x^2 + x + 1)^2 &= (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) = \\ &= (x^2 + x + 1) \cdot x^2 + (x^2 + x + 1) \cdot x + (x^2 + x + 1) \cdot 1 = \\ &= (x^4 + x^3 + x^2) + (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1) = \\ &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

Riešenie vzorcom:

$$(x^2 + x + 1)^2 = [(x^2 + x) + 1]^2 = (x^2 + x)^2 + 2 \cdot (x^2 + x) \cdot 1 + 1^2 =$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + x)^2 + 2 \cdot (x^2 + x) \cdot 1 + 1^2 = \\ &= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot x + x^2 + 2x^2 + 2x + 1 = \\ &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

Vidíme, že riešenie druhej mocniny trojčlena je ľahšie pomocou súčinu.

Úlohy b) a c) riešte samostatne.

Zapamätajte si:

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B)$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$(A - B)^2 = (A - B) \cdot (A - B)$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

Cvičenie 3 Vypočítajte druhé mocniny.

a) $(x^2 - x - 1)^2$ b) $(y + 2y^3 - 4)^2$ c) $(-2 + z - 5z^3)^2$

Vypočítané cvičenia môžeš poslať na mail viera.kolbaska@spsehalova.sk.

Riešenia Ti budú skontrolované a ohodnotené.

Podobné úlohy nájdeš v Zbierke č. 1, str. 63 – str. 65.