

Exponenciálne rovnice 1.

Exponenciálna rovnica je (zjednodušene povediac) **rovnica s mocninou**.

Základ tejto mocniny je **kladné číslo rôzne od 1**,

v exponente je výraz s **neznámou**, napríklad:

exponenty mocnín $2x-1; x-1$

rovnica $5^{2x-1} = 25^{x-1}$

základy mocnín $5; 25$

Pri riešení exponenciálnej rovnice používame **vzorce (pravidlá) počítania s mocninami**.

Uvádzame ich v zjednodušenej forme bez podmienok:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
$a^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^r : a^s = a^{r-s}$
		$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Hlavným pravidlom pri riešení exponenciálnych rovníc je veta o **rovnosti mocnín**:

Dve mocniny sa rovnajú vtedy, ak sa rovnajú ich základy a ich exponenty.

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$
$$a > 0; a \neq 1$$

Príklad 1 Rieš rovnice:

a) $5^x = 1$

b) $4^{x+3} = 16$

c) $9^{x-3} = \frac{1}{81}$

d) $7^{3x+4} = \frac{1}{49}$

Riešenie:

Tieto rovnice patria medzi najjednoduchšie. Spravidla sa objavujú už pri riešení úloh na exponenciálnu funkciu, keď hľadáme alebo priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami alebo priesečníky grafov funkcií.

A pretože dve mocniny sa rovnajú vtedy, ak sa rovnajú ich základy a exponenty, upravíme si mocniny v rovnici tak, aby mali **rovnaké základy**. Potom podľa potreby použijeme vhodné vzorce.

a) $5^x = 1$

Na ľavej strane rovnice sa nachádza mocnina so **základom 5**.

Využijeme vedomosti o mocninách a číslo 1 z pravej strany vyjadríme ako 5^0 , lebo $5^0 = 1$.

Platí:

$$5^x = 5^0$$

Teraz použijeme vetu o rovnosti mocnín, takže $x = 0$.

Úlohu môžeme riešiť aj tak, že sa spýtame:

Ktorá mocnina čísla 5 je 1? No predsa 5^0 , takže riešením je $x = 0$.

b) $4^{x+3} = 16$

Na ľavej strane rovnice sa nachádza mocnina so základom 4.

Využijeme vedomosti o mocninách a číslo 16 z pravej strany vyjadríme ako 4^2 , lebo

$$4^2 = 16.$$

Platí:

$$4^{x+3} = 4^2$$

Teraz použijeme vetu o rovnosti mocnín, takže $x + 3 = 2$.

Túto jednoduchú rovnicu riešime ekvivalentnými úpravami a $x = -1$.

Úlohu môžeme riešiť aj tak, že sa spýtame:

Ktorá mocnina čísla 4 je 16? No predsa druhá mocnina čísla 4.

Takže riešením je $x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1$.

c) $9^{x-3} = \frac{1}{81}$

Na ľavej strane rovnice sa nachádza mocnina so základom 9.

Využijeme vedomosti o mocninách a číslo $\frac{1}{81}$ z pravej strany vyjadríme ako 9^{-2} , lebo

$$9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}.$$

Platí:

$$9^{x-3} = 9^{-2}$$

Teraz použijeme vetu o rovnosti mocnín, takže $x - 3 = -2$.

Túto jednoduchú rovnicu riešime ekvivalentnými úpravami a $x = 1$.

Úlohu môžeme riešiť aj tak, že sa spýtame:

Ktorá mocnina čísla 9 je $\frac{1}{81}$? No predsa mínus druhá mocnina.

Takže riešením je $x - 3 = -2 \Rightarrow x = 1$.

d) $7^{3x+4} = \frac{1}{49}$

Na ľavej strane rovnice sa nachádza mocnina so **základom 7**.

Využijeme vedomosti o mocninách a číslo $\frac{1}{49}$ z pravej strany vyjadríme ako 7^{-2} , lebo

$$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}.$$

Platí:

$$7^{3x+4} = 7^{-2}$$

Teraz použijeme vetu o rovnosti mocnín, takže **$3x + 4 = -2$** .

Túto jednoduchú rovnicu riešime ekvivalentnými úpravami a **$x = -2$** .

Úlohu môžeme riešiť aj tak, že sa spýtame:

Ktorá mocnina čísla 7 je $\frac{1}{49}$? **No predsa mínus druhá mocnina.**

Takže riešením je $3x + 4 = -2 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$.

Cvičenie 1 Rieš rovnice:

a) $2^{2x-1} = 16$

b) $6^{x-1} = 36$

c) $3^{4x-2} = \frac{1}{27}$

d) $10^{3x+4} = 0,01$

Príklad 2 Rieš rovnice:

a) $5^{x-1} = 25^{x+1}$

b) $2^{x+3} = 8^{x-5}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 27^{x+1}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x+2}$

Riešenie:

Aj v tejto úlohe použijeme vetu, že dve mocniny sa rovnajú vtedy, ak sa rovnajú ich základy a exponenty. Upravíme si mocniny v rovnici tak, aby mali **rovnaké základy**. Potom podľa potreby použijeme vhodné vzorce.

a) $5^{x-1} = 25^{x+1}$ **Platí $5^2 = 25$.**

$$5^{x-1} = (5^2)^{x+1}$$

Exponenty vynásobíme podľa **$(a^r)^s = a^{r \cdot s} \Rightarrow 5^{2 \cdot (x+1)}$**

$$5^{x-1} = 5^{2 \cdot (x+1)}$$

Máme rovnaké základy mocnín na oboch stranách rovnice (5).

Teraz porovnáme exponenty a riešime rovnicu **$x - 1 = 2 \cdot (x + 1)$** .

$$x - 1 = 2x + 2$$

$$-x = 3$$

$$x = -3$$

Skúška správnosti riešenia:

$$\left. \begin{array}{l} \text{L} = 5^{x-1} = 5^{-3-1} = 5^{-4} \\ \text{P} = 25^{x+1} = 25^{-3+1} = 25^{-2} = (5^2)^{-2} = 5^{-4} \end{array} \right\} \quad \text{L} = \text{P}, \text{ riešenie je správne, } x = -3.$$

b) $2^{x+3} = 8^{x-5}$

Platí $2^3 = 8$.

$$2^{x+3} = (2^3)^{x-5} \quad \text{Exponenty vynásobíme podľa } (a^r)^s = a^{r \cdot s} \Rightarrow 2^{3(x-5)}$$

$$2^{x+3} = 2^{3(x-5)}$$

Máme rovnaké základy mocnín na oboch stranách rovnice (2).

Teraz porovnáme exponenty a riešime rovnicu $x + 3 = 3 \cdot (x - 5)$.

$$x + 3 = 3x - 15$$

$$-2x = -18$$

$$x = 9$$

Skúška správnosti riešenia:

$$\left. \begin{array}{l} \text{L} = 2^{x+3} = 2^{9+3} = 2^{12} \\ \text{P} = 8^{x-5} = 8^{9-5} = 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12} \end{array} \right\} \quad \text{L} = \text{P}, \text{ riešenie je správne, } x = 9.$$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 27^{x+1}$

Platí $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{1}\right)^3 = 27$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^{x+1} \quad \text{Exponenty vynásobíme podľa } (a^r)^s = a^{r \cdot s} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-3(x+1)}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3(x+1)}$$

Máme rovnaké základy mocnín na oboch stranách rovnice.

Teraz porovnáme exponenty a riešime rovnicu $x - 2 = -3 \cdot (x + 1)$.

$$x - 2 = -3x - 3$$

$$4x = -1$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Skúška správnosti riešenia:

$$\left. \begin{aligned} \text{L} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-1}{4}-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-9}{4}} = 3^{\frac{9}{4}} \\ \text{P} &= 27^{x+1} = (3^3)^{\frac{-1}{4}+1} = (3^3)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{9}{4}} \end{aligned} \right\} \text{L} = \text{P}, \text{ riešenie je správne, } x = -\frac{1}{4}.$$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x+2}$

Platí $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{x+2}$$

Exponenty vynásobíme podľa $(a^r)^s = a^{r \cdot s} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-2(x+2)}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2 \cdot (x+2)}$$

Máme rovnaké základy mocnín na oboch stranách rovnice.

Teraz porovnáme exponenty a riešime rovnicu $x + 5 = -2 \cdot (x + 2).$

$$x + 5 = -2x - 4$$

$$3x = -9$$

$$x = -3$$

Skúška správnosti riešenia:

$$\text{L} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\text{P} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x+2} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-3+2} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-1} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

L = P, riešenie je správne, $x = -3.$

Cvičenie 3.1 Rieš rovnice:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$

b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+5}$

c) $\left(\frac{8}{125}\right)^{x-2} = \left(\frac{4}{25}\right)^{x+2}$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^{2x-3} = \left(\frac{125}{343}\right)^{x-2}$

Riešenie: Použijeme vzorec $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1}, x = 6$

b) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{x-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+5}, x = 11$

c) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^{x-2} = \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^{x+2}, x = 10$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^{2x-3} = \left[\left(\frac{5}{7}\right)^3\right]^{x-2}, x = 3$

Cvičenie 3.2 Rieš rovnice:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 4^{x-1}$

b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+5}$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x+2}$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{16}{25}\right)^{x-2}$

Riešenie: Použijeme vzorec $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ a vzorec $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

a) $(2^{-1})^{x+4} = (2^2)^{x-1}, x = -\frac{2}{3}$

b) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^{x-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+5}, x = \frac{1}{3}$

c) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^{x-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x+2}, x = 0$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-3} = \left[\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}\right]^{x-2}, x = \frac{7}{4}$

Príklad 4 Rieš rovnice:

a) $5^{2x-1} \cdot 25^x = \frac{1}{5}$

b) $2^{x-1} \cdot 4^{x+3} = \frac{1}{8}$

c) $49^{x+2} \cdot 7^{x-3} = \frac{1}{343}$

d) $16^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} = 4$

Riešenie: Použijeme vzorec $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$, vzorec $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, vzorec $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

a) $5^{2x-1} \cdot 25^x = \frac{1}{5}$

$5^{2x-1} \cdot (5^2)^x = 5^{-1}$ Mocniny upravíme na rovnaký základ (5).

$5^{2x-1} \cdot 5^{2x} = 5^{-1}$ Umocníme mocninu (vynásobíme exponenty).

$5^{2x-1+2x} = 5^{-1}$ Vynásobíme mocniny (základ opíšeme a sčítame exponenty)

Porovnáme exponenty, riešime rovnicu:

$2x - 1 + 2x = -1 \quad / +1$

$$4x = 0 \quad / : 4$$

$$x = 0$$

Skúškou overíme správnosť riešenia rovnice.

$$\text{b) } 2^{x-1} \cdot (2^2)^{x+3} = 2^{-3} \quad 2^{x-1+2 \cdot (x+3)} = 2^{-3} \quad x = -\frac{8}{3}$$

$$\text{c) } (7^2)^{x+2} \cdot 7^{x-3} = 7^{-3} \quad 7^{2 \cdot (x+2) + (x-3)} = 7^{-3} \quad x = -\frac{4}{3}$$

$$\text{d) } (4^2)^x \cdot (4^{-1})^{x+3} = 4 \quad 4^{2 \cdot x + (-1) \cdot (x+3)} = 4^1 \quad x = 4$$

Príklad 5 Rieš rovnice:

$$\text{a) } 49^{x+3} = \frac{7^{x-2}}{7^{x+3}}$$

$$\text{b) } \frac{9^{x-2}}{3^{1-x}} = 27^{x-1}$$

$$\text{c) } \frac{4^{3x}}{16^{x+1}} = \frac{2^{x+1}}{8^{1-x}}$$

$$\text{d) } \frac{100^{x+3}}{10^{-x}} = \frac{1000^{x+4}}{100^{3x}}$$

Riešenie: Použijeme vzorce $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$, $a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

$$\text{a) } 49^{x+3} = \frac{7^{x-2}}{7^{x+3}}$$

$$(7^2)^{x+3} = 7^{x-2-(x+3)} \quad \text{Upravíme na mocniny s rovnakým základom (7).}$$

$$7^{2x+6} = 7^{x-2-x-3} \quad \text{Upravíme výrazy s mocninami (umocníme a podelíme).}$$

Pri delení mocnín na pravej strane (delenie v tvare zlomku)
základ opíšeme a exponenty odčítame.

Porovnáme exponenty, riešime rovnicu:

$$2x + 6 = x - 2 - x - 3 \quad / - 6$$

$$2x = -11 \quad / : 2$$

$$x = -5,5$$

Skúškou overíme správnosť riešenia rovnice.

$$\text{b) } \frac{9^{x-2}}{3^{1-x}} = 27^{x-1} \quad 3^{2 \cdot (x-2) - (1-x)} = 3^{3 \cdot (x-1)} \quad 0 = 2 \quad \text{Rovnica nemá riešenie}$$

$$\text{c) } \frac{4^{3x}}{16^{x+1}} = \frac{2^{x+1}}{8^{1-x}} \quad 2^{2 \cdot 3x - 4 \cdot (x+1)} = 2^{x+1-3 \cdot (1-x)} \quad x = -1$$

$$\text{d) } \frac{100^{x+3}}{10^{-x}} = \frac{1000^{x+4}}{100^{3x}} \quad 10^{2 \cdot (x+3) - (-x)} = 10^{3 \cdot (x+4) - 2 \cdot (3x)} \quad x = -1$$

Príklad 6 Rieš rovnice:

a) $2^{x^2-4} = 1$

b) $4^{x^2-2x} = 8$

Riešenie:

a) $2^{x^2-4} = 1$ Pravú stranu rovnice upravíme na mocninu so základom 2.

$2^{x^2-4} = 2^0$ Riešime kvadratickú rovnicu: $x^2 - 4 = 0$.

Kvadratickú rovnicu môžeme riešiť rozkladom, pomocou diskriminantu, my ju vyriešime pomocou druhej odmocniny.

$$x^2 - 4 = 0 \quad /+ 4$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4}$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

Skúškou overíme správnosť riešenia rovnice.

b) $4^{x^2-2x} = 8$ Mocniny si vyjadríme pomocou mocniny so základom 2.

$$(2^2)^{x^2-2x} = 2^3$$

$$2^{2x^2-4x} = 2^3$$

Použijeme vetu o rovnosti mocnín s rovnakým základom, pracujeme s exponentami.

$$2x^2 - 4x = 3$$

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$a = 2, \quad b = -4, \quad c = -3$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 16 + 24 = 40$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{40} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Skúškou overíme správnosť riešenia rovnice.

Prípadné otázky, prosím, pošlite na adresu:
viera.kolbaska@spsehalova.sk

