

Nepriama úmernosť

Pojem **Nepriama úmernosť** ste používali,
tak ako pojem Priama úmernosť, na základnej škole.
Spolu s týmto pojmom ste aj pri riešení úloh na nepriamu úmernosť používali pojem
trojčlenka.

Definícia nepriamej úmernosti bola:

Koľkokrát sa *zväčší* jedna veličina, toľkokrát sa *zmenší* druhá veličina.

Koľkokrát sa *zmenší* jedna veličina, toľkokrát sa *zväčší* druhá veličina.

Riešili ste aj úlohy tohto typu:

Príklad 1

Juraj ide do školy, ktorá je vzdialená od miesta jeho bydliska 3,4 km.

- a) Vypočítajte, akou rýchlosťou by musel ísť, aby prišiel do školy za 15 minút, za 20 minút, za 25 minút, za 30 minút, za 35 minút.
- b) Vyjadrite rovnicou závislosť rýchlosti (y), ktorou ide, od času (x), ktorý ide.
- c) Zostrojte graf tejto závislosti.

Riešenie:

- a) Máme vypočítať Jurajovu rýchlosť na ceste do školy.

Použijeme vzorec $v = \frac{s}{t}$, v ktorom s je dráha (cesta do školy 3,4 km), v je rýchlosť (tú máme vypočítať) a t je čas, ktorý Juraj ide.

Rýchlosť v uvádzame v kilometroch za hodinu. Preto najprv **čas** t v minútach vyjadríme v hodinách.

$$15 \text{ minút: } \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ hodiny}$$

$$20 \text{ minút: } \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \text{ hodiny}$$

$$25 \text{ minút: } \frac{25}{60} = \frac{5}{12} \text{ hodiny}$$

$$30 \text{ minút: } \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \text{ hodiny}$$

$$35 \text{ minút: } \frac{35}{60} = \frac{7}{12} \text{ hodiny}$$

Vypočítame **rýchlosť** pre dané hodnoty času a dráhy podľa vzorca z fyziky $v = \frac{s}{t}$.

$$\text{Ak } t = \frac{1}{4}, \text{ potom } v = \frac{3,4}{\frac{1}{4}} = \frac{3,4}{1} : \frac{1}{4} = \frac{3,4}{1} \cdot \frac{4}{1} = 13,6 \text{ km/h.}$$

$$\text{Ak } t = \frac{1}{3}, \text{ potom } v = \frac{3,4}{\frac{1}{3}} = \frac{3,4}{1} : \frac{1}{3} = \frac{3,4}{1} \cdot \frac{3}{1} = 10,2 \text{ km/h.}$$

$$\text{Ak } t = \frac{5}{12}, \text{ potom } v = \frac{3,4}{\frac{5}{12}} = \frac{3,4}{1} : \frac{5}{12} = \frac{3,4}{1} \cdot \frac{12}{5} = 8,16 \text{ km/h.}$$

$$\text{Ak } t = \frac{1}{2}, \text{ potom } v = \frac{3,4}{\frac{1}{2}} = \frac{3,4}{1} : \frac{1}{2} = \frac{3,4}{1} \cdot \frac{2}{1} = 6,8 \text{ km/h.}$$

$$\text{Ak } t = \frac{7}{12}, \text{ potom } v = \frac{3,4}{\frac{7}{12}} = \frac{3,4}{1} : \frac{7}{12} = \frac{3,4}{1} \cdot \frac{12}{7} = 5,83 \text{ km/h.}$$

Poznámka:

Desatinné číslo **3,4** sme mohli zapísať aj zlomkom $\frac{34}{10}$, ale pre riešenie úlohy sme použili radšej $\frac{3,4}{1}$.

Výsledky zapíšeme do tabuľky, je to prehľadnejšie.

Čas t (h)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$
Rýchlosť $v = \frac{3,4}{t}$ (km/h)	13,6	10,2	8,16	6,8	5,83

b) Teraz vyjadríme rovnicou **závislosť rýchlosti** v , ktorou ide, od **času** t , ktorý ide.

Použijeme vzorec $v = \frac{s}{t}$, v ktorom použijeme premenné x a y .

x je čas t – nezávislá premenná

y je rýchlosť v – premenná závislá od času a dráhy

Potom funkčnú závislosť rýchlosti od času vyjadríme rovnicou $y = \frac{3,4}{x}$, kde $x > 0$.

c) Graf funkčnej závislosti $y = \frac{3,4}{x}$ narysujeme pomocou dvojíc uvedených v tabuľke z riešenia úlohy a).

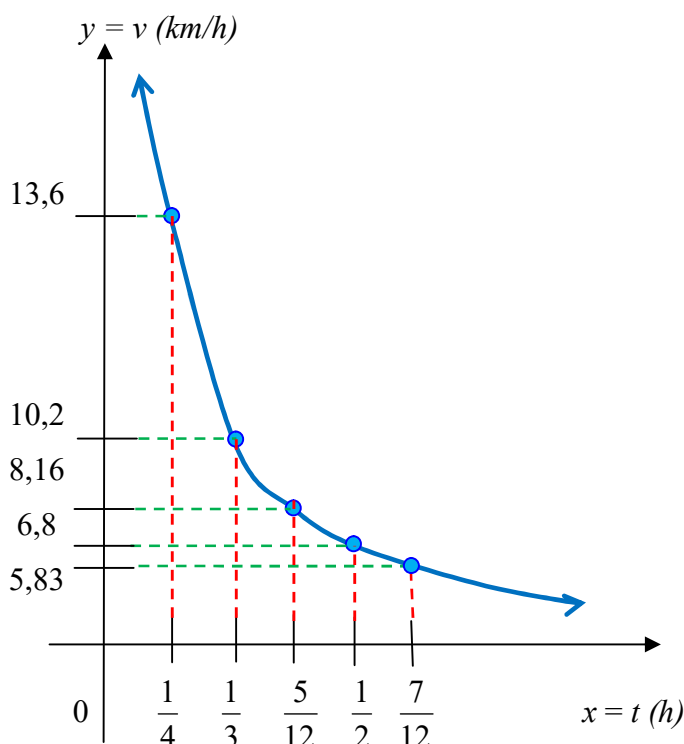
Pri grafoch priamej úmernosti sme zisťovali aj hodnotu pre $x = 0$ (čas 0 minút).

Pre danú funkciu určiť túto hodnotu nemôžeme, menovateľ zlomku sa nesmie rovnať 0.

Z hodnôt v tabuľke je zrejmé, že grafom nebude tentokrát polpriamka, ale bude to krivka.

Graf narysujeme do takej istej sústavy súradníc ako v úlohe a).

Na os x dáme hodnoty pre čas (čas nadobúda len kladné hodnoty), na os y hodnoty pre rýchlosť v (rýchlosť taktiež nadobúda len kladné hodnoty).



Grafom závislosti rýchlosti od času je krivka, ktorá je časťou krivky nazývanej **hyperbola**. Táto krivka sa približuje k osiam sústavy súradníc, ale nepretne ich.

O osiach sústavy hovoríme, že sú **asymptotami** grafu.

Poznámka: Graf je len ilustračný, presne sa dá nakresliť v rôznych grafických editoroch.

Cvičenie 1

Dvaja turisti idú na trasu dlhú 20 km.

- Vypočítajte, akou rýchlosťou majú ísť po tejto trase, aby ju prešli za 4 hodiny; 4,25 hodiny; 4,5 hodiny; 4,75 hodiny a 5 hodín.
- Vyjadrite rovnicou závislosť rýchlosti (y), ktorou majú ísť, od času (x), ktorý pôjdu.
- Zostrojte graf tejto závislosti.

Príklad 2

Majiteľ záhrady, ktorá je oplotená živým plotom dĺžky 840 m, dáva tento plot pravidelne strihať firme PLOTOREZ. Jeden zamestnanec by plot ostrihal za 42 hodín.

- a) Vypočítajte, za koľko hodín by plot ostrihali dvaja, traja, štyria, piati, šiesti zamestnanci tejto firmy, ak všetci zamestnanci firmy pracujú rovnakým výkonom.
- b) Vyjadrite rovnicou závislosť času (y), za ktorý sa bude strihať plot, od počtu zamestnancov (x), ktorí plot budú strihať.
- c) Zostrojte graf tejto závislosti.

Riešenie:

- a) Úlohu riešime pomocou trojčlenky pre nepriamu úmernosť.

$$\begin{array}{l} \downarrow 1 \text{ zamestnanec} \dots\dots\dots 42 \text{ hodín} \uparrow \\ \downarrow 2 \text{ zamestnanci} \dots\dots\dots t \text{ hodín} \uparrow \\ \hline t : 42 = 1 : 2 \\ 2 \cdot t = 42 \cdot 1 \longrightarrow t = \frac{42}{2} \\ t = 21 \text{ hodín} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow 1 \text{ zamestnanec} \dots\dots\dots 42 \text{ hodín} \uparrow \\ \downarrow 3 \text{ zamestnanci} \dots\dots\dots t \text{ hodín} \uparrow \\ \hline t : 42 = 1 : 3 \\ 3 \cdot t = 42 \cdot 1 \longrightarrow t = \frac{42}{3} \\ t = 14 \text{ hodín} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow 1 \text{ zamestnanec} \dots\dots\dots 42 \text{ hodín} \uparrow \\ \downarrow 4 \text{ zamestnanci} \dots\dots\dots t \text{ hodín} \uparrow \\ \hline t : 42 = 1 : 4 \\ 4 \cdot t = 42 \cdot 1 \longrightarrow t = \frac{42}{4} \\ t = 10,5 \text{ hodiny} \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \downarrow 1 \text{ zamestnanec} \dots\dots\dots 42 \text{ hodín} \uparrow \\
 \downarrow 5 \text{ zamestnanci} \dots\dots\dots t \text{ hodín} \uparrow \\
 \hline
 t : 42 = 1 : 5 \\
 5 \cdot t = 42 \cdot 1 \longrightarrow t = \frac{42}{5} \\
 t = 8,4 \text{ hodiny}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \downarrow 1 \text{ zamestnanec} \dots\dots\dots 42 \text{ hodín} \uparrow \\
 \downarrow 6 \text{ zamestnanci} \dots\dots\dots t \text{ hodín} \uparrow \\
 \hline
 t : 42 = 1 : 6 \\
 6 \cdot t = 42 \cdot 1 \longrightarrow t = \frac{42}{6} \\
 t = 7 \text{ hodín}
 \end{array}$$

Výsledky zapíšeme do tabuľky – je prehľadnejšia.

Do prvého riadka tabuľky zapíšeme počty zamestnancov (x), do druhého riadka čas (y) v hodinách, za ktorý bude plot ostrihaný.

Zamestnanci x	1	2	3	4	5	6
Čas $t = y$	42	21	14	10,5	8,4	7

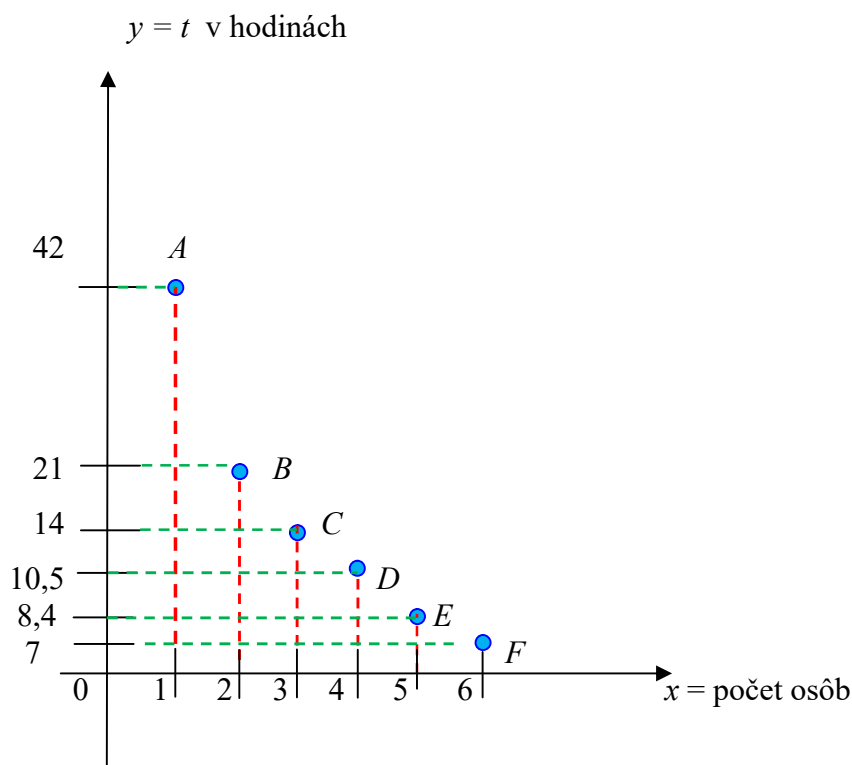
b) Teraz zapíšeme funkčnú závislosť veličín v úlohe.

Pri výpočtoch času sme používali **podiel** $t = \frac{42}{x}$, kde x bol počet zamestnancov.

Potom rovnica bude $y = \frac{42}{x}$, kde x je prirodzené číslo, tzn. 1, 2, 3, 4, 5, 6,

c) Graf $y = \frac{42}{x}$ zostrojíme v pravouhlej sústave súradníc **pomocou dvojíc uvedených v tabuľke.**

Graf funkcie je tvorený len izolovanými bodmi, pretože sa jedná o osoby.



Cvičenie 2

Majiteľ záhrady má na jej ploche bazén. Napúšťa ho zo systému hadíc s rovnakým prietokom. Ak použije len jednu hadicu, naplní bazén 24 hodín.

- Vypočítajte, za koľko hodín by bazén naplnil vodou, ak by použil dve hadice, tri hadice, štyri hadice alebo až päť hadíc.
- Vyjadrite rovnicou závislosť času (y), za ktorý sa bude naplňovať bazén, od počtu hadíc (x), ktorými sa bude bazén naplňovať.
- Zostrojte graf tejto závislosti.

Funkcia nepriamej úmernosti je funkcia daná rovnicou $y = \frac{k}{x}$,

kde neznámu x nazývame **nezávislá premenná** (alebo argument funkcie),
 neznámu y nazývame **závislá premenná** (hodnota funkcie pre neznámu x)
 a k nazývame koeficient nepriamej úmernosti.

Premenné x tvoria definičný obor funkcie. Označujeme ho **D** .

Premenné y tvoria obor hodnôt funkcie. Označujeme ho **H** .

Graf funkcie závisí od definičného oboru funkcie.

Grafom môže byť súbor izolovaných bodov, časť hyperboly alebo hyperbola.

Súčasťou grafu sú asymptoty.

Teraz si učivo zo základnej školy rozšírime – grafy budeme zostrojovať pre reálnu premennú a z grafov budeme odčítavať vlastnosti funkcií a obory funkcií.

Príklad 3

Narysujte grafy funkcií, určte ich obory, monotónnosť, paritu, ohraničenosť, či je funkcia prostá.

a) $y = \frac{4}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) $y = -\frac{5}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Riešenie:

Pre naryšovanie grafov funkcií si utvoríme **tabuľku** s hodnotami x a y .

Hodnoty pre x vyberáme z **definičného oboru** funkcie.

Hodnoty pre y počítame z **rovnice** funkcie.

a) $y = \frac{4}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Potrebné výpočty:

- určenie definičného oboru: $x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$

- vzhľadom na definičný obor vieme, že grafom bude hyperbola; preto vyberáme:

tri záporné hodnoty: $x = -1, x = -2, x = -3$

tri kladné hodnoty: $x = 1, x = 2, x = 3$

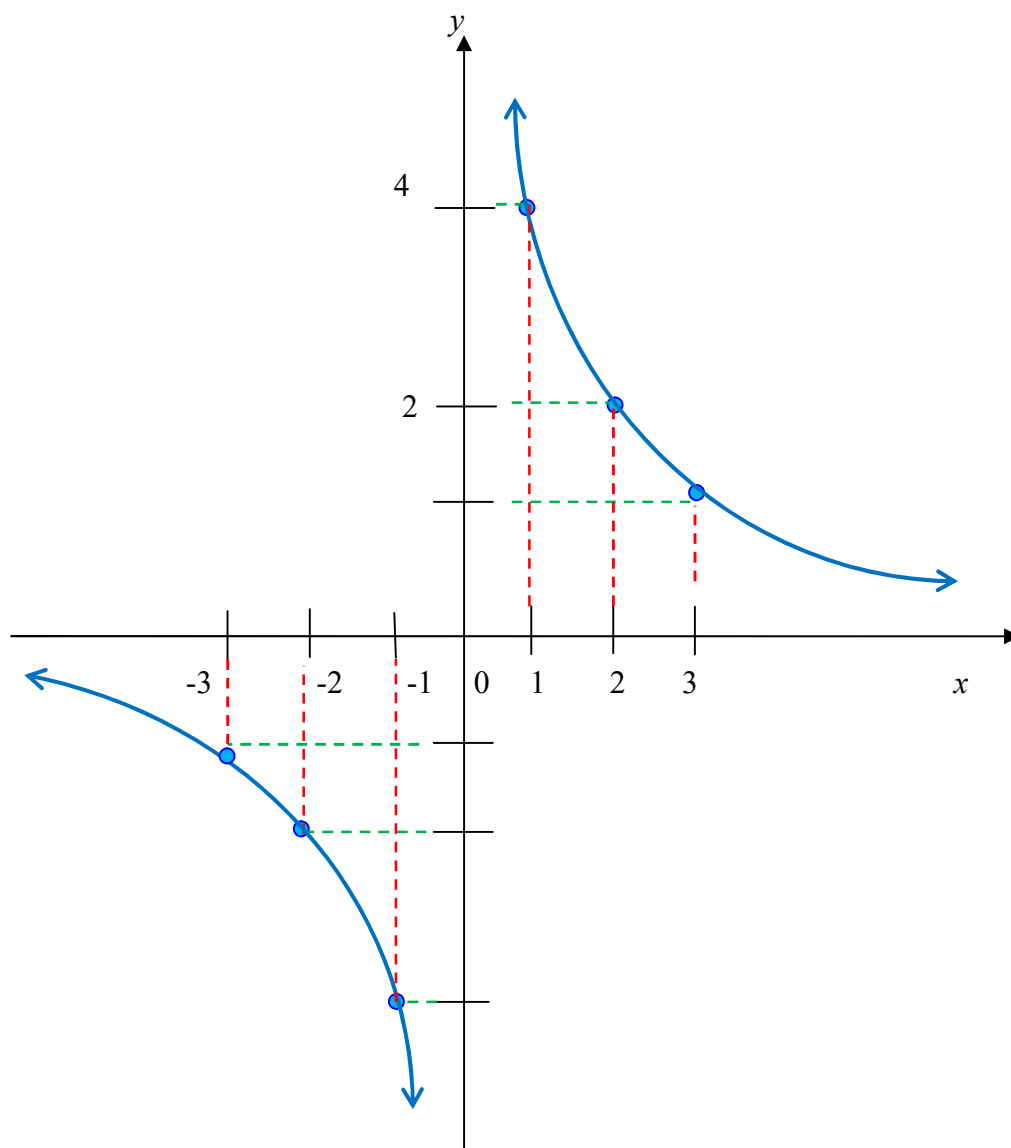
- výpočet hodnôt $y = \frac{4}{x}$

Poznámka:

Hodnoty pre x si môžeme vyberať rôzne a môžeme ich vyberať aj viac.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$y = \frac{4}{x}$	$-1\frac{1}{3}$	-2	-4	4	2	$1\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{lcl}
 x = -3 & y = \frac{4}{x} = \frac{4}{-3} = -1\frac{1}{3} & \longrightarrow \\
 x = -2 & y = \frac{4}{x} = \frac{4}{-2} = -2 & \longrightarrow \\
 x = -1 & y = \frac{4}{x} = \frac{4}{-1} = -4 & \longrightarrow \\
 x = 1 & y = \frac{4}{x} = \frac{4}{1} = 4 & \longrightarrow \\
 x = 2 & y = \frac{4}{x} = \frac{4}{2} = 2 & \longrightarrow \\
 x = 3 & y = \frac{4}{x} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} & \longrightarrow
 \end{array}$$



Grafom funkcie je rovnoosá hyperbola s asymptotami $x = 0$ a $y = 0$.

$D(f)$	$H(f)$	Ohr. dolné	Ohr. horné	Rastúca pre x	Klesajúca pre x	Párna	Nepárna	Prostá
$R - \{0\}$	$R - \{0\}$	Nemá.	Nemá.	Nie je.	$R - \{0\}$	Nie je.	Je.	Je.

Poznámka:

Funkcia **je párna**, ak je jej graf symetrický podľa osi y .

Funkcia **je nepárna**, ak je jej graf symetrický podľa začiatku sústavy súradníc – bodu $0[0;0]$.

Funkcia **je prostá** vtedy, ak je na celom definičnom obore **len rastúca**, alebo **len klesajúca**.

b) $y = -\frac{5}{x}, x \in R - \{0\}$

Potrebné výpočty:

- určenie definičného oboru: $x \in R - \{0\} \Rightarrow D = R - \{0\}$

- vzhľadom na definičný obor grafom bude hyperbola, vyberáme z definičného oboru:

tri záporné hodnoty: $x = -5, x = -2, x = -1$

tri kladné hodnoty: $x = 5, x = 2, x = 1$

- výpočet hodnôt $y = -\frac{5}{x}$

Poznámka:

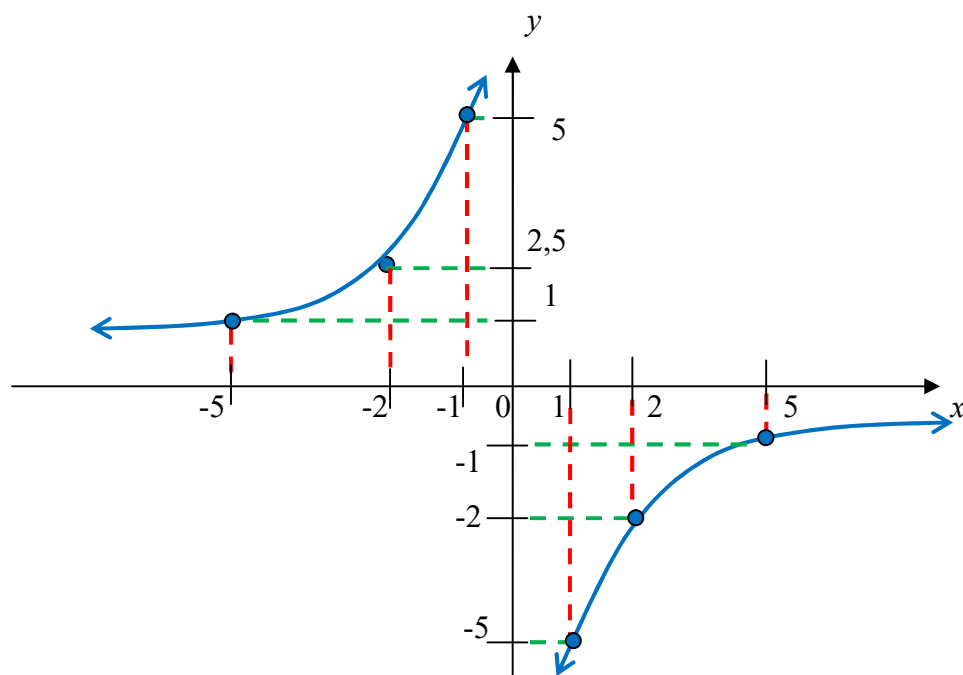
Hodnoty pre x je vhodné vyberať podľa **deliteľnosti** čitateľa.

x	-5	-2	-1	1	2	5
$y = -\frac{5}{x}$	1	2,5	5	-5	-2,5	-1

$x = -5$	$y = -\frac{5}{x} = -\frac{5}{-5} = 1$	→				
$x = -2$	$y = -\frac{5}{x} = -\frac{5}{-2} = 2,5$	→				
$x = -1$	$y = -\frac{5}{x} = -\frac{5}{-1} = 5$	→				
$x = 1$	$y = -\frac{5}{x} = -\frac{5}{1} = -5$	→				
$x = 2$	$y = -\frac{5}{x} = -\frac{5}{2} = -2,5$	→				
$x = 5$	$y = -\frac{5}{x} = -\frac{5}{5} = -1$	→				

Grafom funkcie je rovnoosá hyperbola s asymptotami $x = 0$ a $y = 0$.

$D(f)$	$H(f)$	Ohr. dolné	Ohr. horné	Rastúca pre x	Klesajúca pre x	Párna	Nepárna	Prostá
$R - \{0\}$	$R - \{0\}$	Nemá.	Nemá.	$R - \{0\}$	Nie je.	Nie je.	Je.	Je.



Pre funkciu nepriamej úmernosti $y = \frac{k}{x}$, platí:

Ak **k** je **kladné** číslo, funkcia je na definičnom obore **klesajúca**. Napr. $y = \frac{4}{x}$ $k = 4$

Ak **k** je **záporné** číslo, funkcia je na definičnom obore **rastúca**. Napr. $y = -\frac{5}{x}$ $k = -5$

Cvičenie 3

Narysujte grafy funkcií, určte ich obory, monotónnosť, paritu, ohraničenosť; uveďte, či je funkcia prostá.

a) $f : y = \frac{2}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) $g : y = -\frac{2}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

c) $h : y = \frac{2}{5x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

d) $l : y = -\frac{2}{5x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

e) $m : y = \frac{3}{2x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

f) $n : y = -\frac{3}{2x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Poznámka: Grafy si spracujte aj pomocou grafického softvéru.

Príklad 4

Zistite **rovnicu funkcie nepriamej úmernosti**, ktorej patrí usporiadaná dvojica $[0,5;3]$.

Napíšte, či je **rastúca** alebo **klesajúca**.

Riešenie:

Rovnica funkcie nepriamej úmernosti je $y = \frac{k}{x}$.

Máme určiť **koeficient k** .

Určíme ho pomocou usporiadanej dvojice.

V usporiadanej dvojici $[0,5; 3]$ je $x = 0,5$ a $y = 3$.

Dosadíme ich do rovnice funkcie:

$$y = \frac{k}{x}$$

$$3 = \frac{k}{0,5} \quad / \cdot 0,5$$

$$k = 6$$

Rovnica funkcie nepriamej úmernosti je $y = \frac{6}{x}$.

Keďže koeficient k je **kladné** číslo, funkcia je **klesajúca**.

Cvičenie 4

4. 1 Zistite **rovniciu funkcie nepriamej úmernosti**, ktorej patrí usporiadaná dvojica $[-2; 10]$.
Napíšte, či je **rastúca** alebo **klesajúca**.

4. 2 Zistite **rovniciu funkcie nepriamej úmernosti**, ktorej patrí usporiadaná dvojica $\left[5; \frac{1}{3}\right]$.

Napíšte, či je **rastúca** alebo **klesajúca**.

4. 3 Zistite **rovniciu funkcie nepriamej úmernosti**, do grafu ktorej patrí bod $A[-1; -4]$.
Napíšte, či je **rastúca** alebo **klesajúca**.

4. 3 Zistite **rovniciu funkcie nepriamej úmernosti**, do grafu ktorej patrí bod $A[0; 6]$.
Napíšte, či je **rastúca** alebo **klesajúca**.

Cvičenie 5

5. 1 Zistite, či body $A\left[3; \frac{1}{4}\right]$, $B[4; 3]$ patria do grafu funkcie $f : y = \frac{3}{4x}$.

Poznámka: Vypočítajte hodnotu y pre prvú súradnicu x z daných bodov a potom porovnajte.

5. 2 Napíšte **druhú súradnicu** bodu $A[-5; y]$ tak, aby bol bodom grafu funkcie $f : y = \frac{5}{2x}$.

5. 3 Napíšte **prvú súradnicu** bodu $B\left[x; \frac{2}{3}\right]$ tak, aby bol bodom grafu funkcie $g : y = -\frac{3}{5x}$.

Na precvičenie učiva môžete použiť Zbierku 1, str. 286/8.2.1 – 8. 2.5