

Cvičenie 1 Geometrická postupnosť

V tomto pracovnom liste uvádzam príklady z geometrickej postupnosti riešené viacerými spôsobmi vhodnými pre riešenie on-line testov.

Príklady budú zamerané na riešenie úloh na:

1. zisťovanie, či je postupnosť geometrická
2. určovanie členov postupnosti, ak je známy prvý člen a kvocient postupnosti
3. určovanie kvocientu postupnosti, ak poznáme dva členy postupnosti
4. určovanie kvocientu a prvého člena postupnosti, ak poznáme vzťahy medzi viacerými členmi postupnosti
5. aplikované úlohy na geometrickú postupnosť

Úlohy a ich riešenia

1. Zistite, ktorá z daných postupností je geometrická:

a) $a_n = 3^{1-n}$

b) $b_n = 0,5^{n-1}$

c) $c_n = n^2$

d) $d_n = 3 - n^3$

Riešenie: Na predchádzajúcich hodinách o geometrickej postupnosti sme si všimli, že ak je v n -tom člene postupnosti **mocnina**, tak postupnosť **môže byť geometrická**.

Pripomeňme si, že postupnosť je geometrická, ak medzi každými dvomi za sebou nasledujúcimi členmi existuje konštantný násobok; čo znamená, že **každý nasledujúci člen je rovnakým násobkom predchádzajúceho člena**. Tento násobok vieme zistiť delením, preto hovoríme o **kvociente (podiele) geometrickej postupnosti**.

Kvocient označujeme písmenom q .

Teda, ak zisťujeme, či je postupnosť geometrická, hľadáme kvocient postupnosti.

a) $a_n = 3^{1-n}$

Kvocient môžeme zisťovať rôznymi spôsobmi:

A Hľadanie kvocientu pomocou vypísania prvých členov postupnosti

n	1	2	3	4	5
$a_n = 3^{1-n}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$

Výpočty členov vložených do tabuľky (pre tých, čo zabudli počítat s mocninami):

$$a_1 = 3^{1-1} = 3^0 = 1$$

$$a_2 = 3^{1-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = 3^{1-3} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$a_4 = 3^{1-4} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$a_5 = 3^{1-5} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

Vidíme, že každý nasledujúci člen postupnosti v tabuľke vzniká ako násobok $\frac{1}{3}$

predchádzajúceho člena. Platí $a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot a_n$.

Môžeme tvrdiť, že postupnosť je geometrická s kvocientom $q = \frac{1}{3}$.

Tento fakt by bolo treba dokázať pre každé dva vedľa seba stojace členy.

Dôkaz si ukážeme. Je to zároveň jeden zo spôsobov zisťovania kvocientu.

Poznámka:

A riešenie nám stačí pre riešenie tohto typu úlohy s výberom odpovede.

B Hľadanie kvocientu pomocou n -tého a $n+1$ -ého člena postupnosti

$$a_n = 3^{1-n}$$

$$a_{n+1} = 3^{1-(n+1)} = 3^{1-n-1} = 3^{-n}$$

Kvocient zistíme delením týchto členov.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-n}}{3^{1-n}} = \frac{3^{-n}}{3^1 \cdot 3^{-n}} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

Postupnosť danú $b_n = 0,5^{n-1}$ si vyriešte samostatne.

c) $c_n = n^2$

Ukážeme si, že $c_n = n^2$ nie je geometrickou postupnosťou, aj keď je daná pomocou mocniny.

Vypíšme si niekoľko členov postupnosti.

n	1	2	3	4	5
$c_n = n^2$	1	4	9	16	25

Vidíme, že medzi dvojicami členov postupnosti je ťažko nájsť vzájomnú súvislosť, spoločný vzťah, rekurentný vzorec.

Môžeme tvrdiť, že postupnosť
nie je ani geometrická, ani aritmetická.

Poznámka:

**A riešenie nám stačí pre riešenie
úlohy s výberom odpovede.**

Uvedieme si aj dôkaz, tzn. **výpočet kvocientu zo vzorca:**

$$q = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$$

Zlomok $\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$, ktorý sme získali, nevieme upraviť tak, aby sme získali reálne číslo – „odstránili neznámu n “. Preto postupnosť nemôže byť geometrická.

Postupnosť danú $d_n = 3 - n^3$ si vyriešte samostatne.

2. Určte prvých päť členov geometrickej postupnosti danej prvým členom a kvocientom.

a) $a_1 = 4, \quad q = 0,5$

b) $b_1 = \frac{1}{5}, \quad q = -10$

Riešenie:

Keďže vieme, že v geometrickej postupnosti vznikajú členy násobením predchádzajúceho člena kvocientom, riešenie bude rýchle.

Zapíšme si ho hneď do tabuľky.

n	1	2	3	4	5
a_n	4	$4 \cdot 0,5 = 2$	$2 \cdot 0,5 = 1$	$1 \cdot 0,5 = 0,5$	$0,5 \cdot 0,5 = 0,25$

Zápis výpočtov členov je nasledujúci:

$$a_1 = 4, \quad q = 0,5$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 4 \cdot 0,5 = 2$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = 2 \cdot 0,5 = 1$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 1 \cdot 0,5 = 0,5$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

Poznámka:

**Vidíme, že postupnosť je klesajúca.
Zamyslite sa, či je ohraničená.**

Postupnosť danú $b_1 = \frac{1}{5}$, $q = -10$ si vyriešte samostatne.

3. Vypočítajte **prvý člen postupnosti**, ak poznáte tretí člen a kvocient postupnosti.

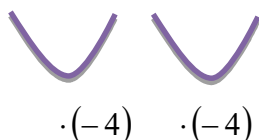
a) $a_3 = 16$, $q = -4$

b) $b_3 = -6$, $q = 2$

Riešenie:

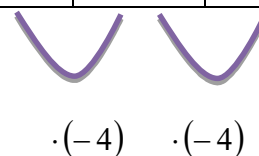
A **Riešme úlohu pomocou zápisu do tabuľky.**

n	1	2	3
a_n	a_1	a_2	16



Ak je kvocient (-4) , potom je zrejmé, že tabuľka by mala vyzeráť takto:

n	1	2	3
a_n	1	-4	16



Odpoveď je:

prvý člen postupnosti má hodnotu 1.

B **Zápis iného riešenia úlohy je:**

$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2 = 16$$

Teda platí:

$$a_1 \cdot (-4)^2 = 16$$

$$a_1 \cdot 16 = 16 \quad / :16$$

$$a_1 = \mathbf{1}$$

Postupnosť danú $b_3 = -6$, $q = 2$ si vyriešte samostatne.

4. Dané sú dva členy geometrickej postupnosti. Vypočítajte jej **prvý člen** a **kvocient**.

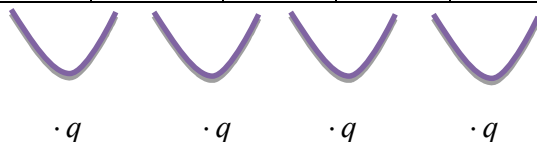
a) $a_3 = -9$, $a_5 = -1$

b) $b_2 = 25$, $b_5 = \frac{1}{125}$

Riešenie:

A Riešme úlohu pomocou zápisu do tabuľky.

n	1	2	3	4	5
a_n	a_1	a_2	-9	a_4	-1



Vidíme, že q by mohlo byť $\frac{1}{3}$. Potom: $a_4 = -9 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{9}{3} = -3$

Ideme „naspäť“, násobenie člena kvocientom meníme na delenie:

$$a_2 = -9 : \frac{1}{3} = -9 \cdot \frac{3}{1} = -27$$

$$a_1 = -27 : \frac{1}{3} = -27 \cdot \frac{3}{1} = -81$$

Potom by mohla tabuľka vyzerat' takto:

n	1	2	3	4	5
a_n	-81	-27	-9	-3	-1

Ked'že máme medzi členmi $a_3 = -9$, $a_5 = -1$ „násobené dva kvocienty“, tzn. máme

$q \cdot q = q^2$, je potrebné zvážiť záporné riešenie $-\frac{1}{3}$.

Toto riešenie si overte samostatne.

B Zápis iného riešenia úlohy

Využijeme členy postupnosti, ktorých hodnotu poznáme a vypočítame kvocient.

$$\text{Platí: } a_5 = a_4 \cdot q = (a_3 \cdot q) \cdot q = a_3 \cdot q^2$$

Potom:

$$a_5 = a_3 \cdot q^2$$

$$-1 = -9 \cdot q^2 \quad / : (-9)$$

$$\frac{1}{9} = q^2 \quad \Longrightarrow \quad q_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} = \pm \frac{1}{3}$$

Teraz vypočítame **prvý člen** postupnosti.

$$\text{Znovu si vytvoríme vzťah: } a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

Potom: $a_3 = a_1 \cdot q^2$

$$-9 = a_1 \cdot \left(\pm \frac{1}{3}\right)^2$$

$$-9 = a_1 \cdot \frac{1}{9} \quad / \cdot 9$$

$$-81 = a_1$$



Odpoveď je:

prvý člen je -81

kvocient je $\pm \frac{1}{3}$

Postupnosť danú $b_2 = 25$, $b_5 = \frac{1}{125}$ si vyriešte samostatne.

5. Medzi čísla $0,5$ a 128 vložte 3 čísla tak, aby s danými číslami tvorili geometrickú postupnosť.

Riešenie:

Použijeme tabuľku.

n	1	2	3	4	5
a_n	0,5	a_2	a_3	a_4	128

Vidíme, že treba vypočítať druhý, tretí a štvrtý člen geometrickej postupnosti.

Možno už viacerí z vás vedia aj správne riešenie.

My použijeme členy postupnosti, ktorých hodnotu poznáme a vypočítame kvocient.

Platí: $a_5 = a_1 \cdot q^4$

Potom:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$128 = 0,5 \cdot q^4 \quad / : 0,5$$

$$256 = q^4 \Rightarrow q_{1,2} = \pm \sqrt[4]{256} = \pm 4$$

Poznámka:

$$a_5 = a_4 \cdot q$$

$$a_5 = a_3 \cdot q^2$$

$$a_5 = a_2 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

Teraz vypočítame **druhý, tretí a štvrtý člen** postupnosti.

Riešenia budú dve, lebo máme dve hodnoty pre kvocient.

$$q = 4$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 0,5 \cdot 4 = 2$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = 2 \cdot 4 = 8$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 8 \cdot 4 = 32$$

$$q = -4$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 0,5 \cdot (-4) = -2$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = -2 \cdot (-4) = 8$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 8 \cdot (-4) = -32$$

Odpoveď: Medzi čísla $0,5$ a 128 môžeme vložiť alebo čísla **2, 8, 32** alebo čísla $-2, 8, -32$.

Nezabudnite:

Aritmetická postupnosť

- ✓ existuje **diferencia**
 d – reálne číslo
- ✓ platí $a_{n+1} = a_n + d$
- ✓ členy môžeme zapisovať:

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d$$

$$a_{10} = a_3 + 7d$$

$$a_7 = a_4 + 3d \dots\dots\dots$$

Geometrická postupnosť

- ✓ existuje **kvocient**
 q – reálne číslo
- ✓ platí $a_{n+1} = a_n \cdot q$
- ✓ členy môžeme zapisovať:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q$$

$$a_{10} = a_3 \cdot q^7$$

$$a_7 = a_4 \cdot q^3 \dots\dots\dots$$

Problémová úloha:

Mám pravdu, že keď je postupnosť aritmetická, tak nemôže byť geometrická?

A aká je aritmetická postupnosť, ktorej diferencia je 0 a aká je geometrická postupnosť, ktorej kvocient je 0 alebo 1?