

Komplexné čísla

A Pojem komplexného čísla v algebrickom tvare, určovanie reálnej a imaginárnej časti čísla, znázorňovanie komplexného čísla v Gaussovej rovine

Algebrický tvar komplexného čísla

$$a = a_1 + a_2 \cdot i$$

Reálna časť komplexného čísla

$$a_1$$

Imaginárna časť komplexného čísla

$$a_2$$

Gaussova rovina – znázorňovanie komplexných čísel v pravouhlej sústave súradníc (reálne časť na os x a imaginárna časť na os y) pomocou bodu alebo vektora

Imaginárna jednotka – z riešenia kvadratickej rovnice v množine komplexných čísel:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-1}$$

1. Určte reálnu a imaginárnu časť daných komplexných čísel a znázornite ich v Gaussovej rovine.

$$a = 2 + 3 \cdot i$$

$$b = -3 + 2 \cdot i$$

$$c = -4 - 5 \cdot i$$

$$d = 0,5 - 0,2 \cdot i$$

$$e = -1,2 + i$$

$$f = -3,8 \cdot i$$

$$g = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot i$$

$$h = -\frac{1}{5} + \frac{2 \cdot i}{7}$$

$$k = 1\frac{6}{7} - 2\frac{1}{3} \cdot i$$

$$l = \frac{5 + 3 \cdot i}{2}$$

$$m = \frac{1 - 6 \cdot i}{3}$$

$$n = \frac{10 \cdot i + 9}{5}$$

Riešenie:

Označte si **reálnu časť** komplexného čísla x_1 a **imaginárnu časť** x_2 .

$$a = 2 + 3 \cdot i$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3$$

$$b = -3 + 2 \cdot i$$

$$b_1 = -3$$

$$b_2 = 2$$

$$c = -4 - 5 \cdot i$$

$$c_1 = -4$$

$$c_2 = -5$$

$$d = 0,5 - 0,2 \cdot i$$

$$d_1 = 0,5$$

$$d_2 = -0,2$$

$$e = -1,2 + i$$

$$e_1 = -1,2$$

$$e_2 = 1$$

$$f = -3,8 \cdot i$$

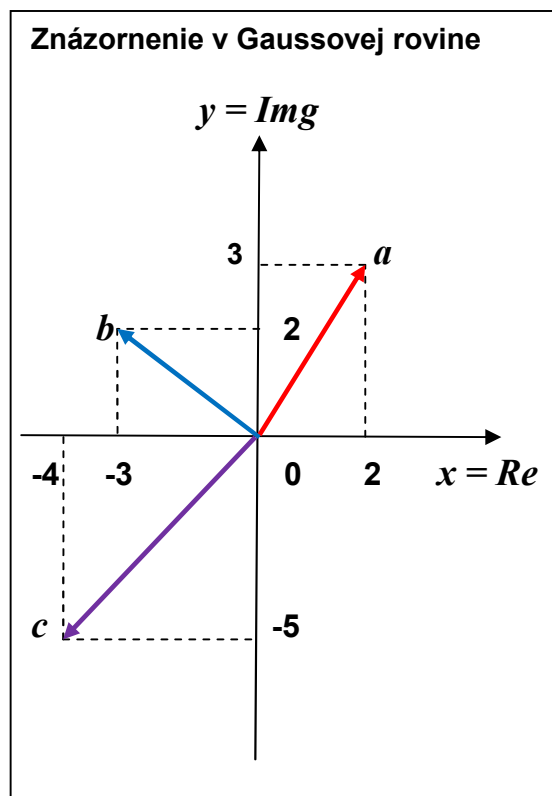
$$f_1 = 0$$

$$f_2 = -3,8$$

Poznámka: znamienko „krát“ v imaginárnej časti čísla netreba písať.

Platí: $a = 2 + 3 \cdot i = 2 + 3i$

$g = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot i$	$g_1 = \frac{1}{2}$	$g_2 = \frac{2}{3}$
$h = -\frac{1}{5} + \frac{2 \cdot i}{7}$	$h_1 = -\frac{1}{5}$	$h_2 = \frac{2}{7}$
$k = 1\frac{6}{7} - 2\frac{1}{3} \cdot i$	$k_1 = 1\frac{6}{7}$	$k_2 = -2\frac{1}{3}$
$l = \frac{5 + 3 \cdot i}{2}$	$l_1 = 2,5$	$l_2 = 1,5$
$m = \frac{1 - 6 \cdot i}{3}$	$m_1 = \frac{1}{3}$	$m_2 = -2$
$n = \frac{10 \cdot i + 9}{5}$	$n_1 = \frac{9}{5}$	$n_2 = \frac{10}{5} = 2$



Na obrázku sú prvé tri komplexné čísla znázornené graficky v Gaussovej rovine pomocou vektorov.

B Počtové operácie v množine komplexných čísel

2. Vypočítajte súčty a rozdiely komplexných čísel.

- | | |
|---|---|
| a) $(2 + 3 \cdot i) + (4 + 6 \cdot i) =$ | b) $(-3 + 2 \cdot i) + (4 - 5 \cdot i) + (-1 - 2 \cdot i) =$ |
| c) $(-4 - 5 \cdot i) - (3 + 2 \cdot i) =$ | d) $(5 - 2 \cdot i) - (3 - 2 \cdot i) - (-4 + i) =$ |
| e) $(-1,2 + i) + (-3,5 + i) - (i - 4) =$ | f) $(1 - 3,8 \cdot i) - (-1,5 + 0,2 \cdot i) + (2 \cdot i) =$ |

Riešenie: Použite vedomosti o výrazoch a pravidlá pre počítanie so zátvorkami.

- a) $(2 + 3 \cdot i) + (4 + 6 \cdot i) = 2 + 4 + 3i + 6i = 6 + 9i$
 b) $(-3 + 2 \cdot i) + (4 - 5 \cdot i) + (-1 - 2 \cdot i) = -3 + 4 - 1 + 2i - 5i - 2i = -5i$
 c) $(-4 - 5 \cdot i) - (3 + 2 \cdot i) = -4 - 5i - 3 - 2i = -4 - 3 - 5i - 2i = -7 - 7i$
 d) $(5 - 2 \cdot i) - (3 - 2 \cdot i) - (-4 + i) = 5 - 2i - 3 + 2i + 4 - i = 6 - i$
 e) $(-1,2 + i) + (-3,5 + i) - (i - 4) = -1,2 + i - 3,5 + i - i + 4 = -0,7 + i$
 f) $(1 - 3,8 \cdot i) - (-1,5 + 0,2 \cdot i) + (2 \cdot i) = 1 - 3,8i + 1,5 - 0,2i + 2i = 2,5 - 2i$

Z riešenia úloh vidíme, že pri súčte komplexných čísel **sčítavame reálne časti** a zvlášť **imaginárne časti** komplexných čísel. Platí:

$$(a_1 + a_2 \cdot i) + (b_1 + b_2 \cdot i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \cdot i$$

Pre rozdiel komplexných čísel platí taktiež: odčítavame reálne časti zvlášť a imaginárne časti zvlášť. Platí:

$$(a_1 + a_2 \cdot i) - (b_1 + b_2 \cdot i) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \cdot i$$

3. Vypočítajte hodnoty komplexných čísel.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \ 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot i \right) + 2 \cdot \left(1 - \frac{i}{2} \right) = & \text{b)} \ 35 \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{2 \cdot i}{7} \right) - 4 \cdot \left(\frac{3}{4} + i \right) = \\ \text{c)} \ \frac{5 + 3 \cdot i}{2} + \frac{4 - 2i}{5} = & \text{d)} \ \frac{1 - 6 \cdot i}{3} - \frac{2 - i}{4} = \end{array}$$

Riešenie: Použite vedomosti o výrazoch a pravidlá pre počítanie so zátvorkami. Zátvorky, v ktorých sú komplexné čísla, **roznásobíme** a potom pokračujeme ako v predchádzajúcej úlohe.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \ 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot i \right) + 2 \cdot \left(1 - \frac{i}{2} \right) = 3 + 4i + 2 - i = 5 + 3i \\ \text{b)} \ 35 \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{2 \cdot i}{7} \right) - 4 \cdot \left(\frac{3}{4} + i \right) = -7 + 10i - 3 - 4i = -10 + 6i \\ \text{c)} \ \frac{5 + 3 \cdot i}{2} + \frac{4 - 2i}{5} = \frac{25 + 15i + 8 - 4i}{10} = \frac{33 + 11i}{10} = 3,3 + 1,1i \\ \text{d)} \ \frac{1 - 6 \cdot i}{3} - \frac{2 - i}{4} = \frac{4 - 24i - 6 + 3i}{12} = \frac{-2 - 21i}{12} = -\frac{1}{6} - \frac{7i}{4} \end{array}$$

Ku každému komplexnému číslu existuje číslo opačné a číslo komplexne združené. Napríklad:

Komplexné číslo	Opačné číslo	Komplexne združené číslo
$a = 2 + 3i$	$-a = -2 - 3i$	$\bar{a} = 2 - 3i$
$b = -3 + 2i$	$-b = 3 - 2i$	$\bar{b} = -3 - 2i$
$c = -4 - 5i$	$-c = 4 + 5i$	$\bar{c} = -4 + 5i$
$z = z_1 + z_2 i$	$-z = -z_1 - z_2 i$	$\bar{z} = z_1 - z_2 i$

C Násobenie a delenie, aplikácia v odbornom predmete

O imaginárnej jednotke i platí:

$$\begin{array}{l} i = \sqrt{-1} \\ i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1 \\ i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \end{array}$$

Precvičíme si **násobenie a delenie** komplexných čísel.

4. Vypočítajte:

a) $(2 + 3i) \cdot (4 + 6i) =$

b) $(-3 + 2i) \cdot (4 - 5i) =$

c) $(-4 - 5i) \cdot (3 + 2i) =$

d) $(5 - 2i) \cdot (3 - 2i) =$

e) $(-1,2 + i) \cdot (-3,5 + i) =$

f) $(1 - 3,8i) \cdot (-1,5 + 0,2i) =$

g) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot i\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{i}{2}\right) =$

h) $\left(-\frac{1}{5} + \frac{2i}{7}\right) \cdot \left(\frac{3i}{5}\right) =$

Riešenia:

Použijeme **vedomosti o výrazoch a pravidlá pre počítanie so zátvorkami**.

Zátvorky, v ktorých sú komplexné čísla, **roznásobíme** (každý člen s každým členom)

a potom upravíme člen s $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

a) $(2 + 3 \cdot i) \cdot (4 + 6 \cdot i) = 8 + 12i + 12i + 18i^2 = 8 + 24i - 18 = -10 + 24i$

b) $(-3 + 2 \cdot i) \cdot (4 - 5 \cdot i) = -12 + 15i + 8i - 10i^2 = -12 + 23i + 10 = -2 + 23i$

c) $(-4 - 5 \cdot i) \cdot (3 + 2 \cdot i) = -12 - 8i - 15i - 10i^2 = -12 - 23i + 10 = -2 - 23i$

d) $(5 - 2 \cdot i) \cdot (3 - 2 \cdot i) = 15 - 10i - 6i + 4i^2 = 15 - 16i - 4 = 11 - 16i$

e) $(-1,2 + i) \cdot (-3,5 + i) = 4,2 - 1,2i - 3,5i + i^2 = 4,2 - 4,7i - 1 = 3,2 - 4,7i$

f) $(1 - 3,8 \cdot i) \cdot (-1,5 + 0,2 \cdot i) = -1,5 + 0,2i + 5,7i - 7,6i^2 = -1,5 + 5,9i + 7,6 = 6,1 + 5,9i$

g) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot i\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}i + \frac{2}{9}i - \frac{1}{3}i^2 = \frac{1}{6} + \frac{-9i + 8i}{36} + \frac{1}{3} =$
 $= \frac{3}{6} - \frac{i}{36} = \frac{1}{2} - \frac{i}{36}$

h) $\left(-\frac{1}{5} + \frac{2 \cdot i}{7}\right) \cdot \left(\frac{3i}{5}\right) = -\frac{3i}{25} + \frac{6i^2}{35} = \frac{-6}{35} - \frac{3i}{25}$

5. Vypočítajte druhé mocniny komplexných čísel:

a) $(2 + 3i)^2 =$

b) $(4 - 5i)^2 =$

c) $(-3 + i)^2 =$

d) $\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 =$

e) $\left(\frac{i-4}{3}\right)^2 =$

f) $\left(\frac{3+2i}{4}\right)^2 =$

g) $\left(\frac{i}{4}\right)^2 - i^5 + 2i^4 =$

h) $3 \cdot i^2 - 2 \cdot i^3 + 4i^5 - 6i^4 =$

Riešenie:

Znovu použijeme **vedomosti o výrazoch, pravidlá pre počítanie so zátvorkami**

a s druhou mocninou dvojčlena $(a \pm b)^2 = (a \pm b) \cdot (a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Zátvorky, v ktorých sú komplexné čísla, **roznásobíme** (každý člen s každým členom)

alebo podľa vzorca, a potom upravíme člen s $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

$$\text{a) } (2 + 3i)^2 = (2 + 3i) \cdot (2 + 3i) = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i + 9 \cdot (-1) = -5 + 12i$$

$$\text{b) } (4 - 5i)^2 = (4 - 5i) \cdot (4 - 5i) = 16 - 40i + 25i^2 = 16 - 40i + 25 \cdot (-1) = -9 - 40i$$

$$\text{c) } (-3 + i)^2 = 9 - 6i + i^2 = 9 - 6i + (-1) = 8 - 6i$$

$$\text{d) } \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{1+2i+i^2}{4} = \frac{1+2i-1}{4} = \frac{i}{2}$$

$$\text{e) } \left(\frac{i-4}{3}\right)^2 = \frac{i^2 - 8i + 16}{9} = \frac{-1 - 8i + 16}{9} = \frac{15}{9} - \frac{8i}{9} = \frac{5}{3} - \frac{8i}{9}$$

$$\text{f) } \left(\frac{3+2i}{4}\right)^2 = \frac{9+12i+4i^2}{16} = \frac{9+12i-4}{16} = \frac{5+12i}{16} = \frac{5}{16} + \frac{3i}{4}$$

$$\text{g) } \left(\frac{i}{4}\right)^2 - i^5 + 2i^4 = \frac{i^2}{16} - i + 2 = \frac{-1}{16} - i + 2 = \frac{-1+32}{16} - i = \frac{31}{16} - i$$

$$\text{h) } 3 \cdot i^2 - 2 \cdot i^3 + 4i^5 - 6i^4 = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-i) + 4i - 6 = -3 + 2i + 4i - 6 = -9 + 6i$$

6. Zjednodušte výrazy s imaginárnou jednotkou i :

$$\text{a) } (2i)^2 + 2 \cdot (3 + 2i) =$$

$$\text{b) } -4 \cdot (-1 + 2i) - (5 \cdot i)^2 =$$

$$\text{c) } (i)^2 \cdot (3i - 2) + (4i)^3 =$$

$$\text{d) } \left(\frac{i}{2}\right)^4 + (2i)^3 - i^2 =$$

Riešenie:

$$\text{a) } (2i)^2 + 2 \cdot (3 + 2i) = 4i^2 + 6 + 4i = -4 + 6 + 4i = 2 + 4i$$

$$\text{b) } -4 \cdot (-1 + 2i) - (5 \cdot i)^2 = 4 - 8i - 25i^2 = 4 - 8i + 25 = 29 - 8i$$

$$\text{c) } (i)^2 \cdot (3i - 2) + (4i)^3 = -1 \cdot (3i - 2) + 64i^3 = -3i + 2 - 64i = 2 - 67i$$

$$\text{d) } \left(\frac{i}{2}\right)^4 + (2i)^3 - i^2 = \frac{i^4}{16} + 8i^3 + 1 = \frac{1}{16} - 8i + 1 = \frac{17}{16} - 8i$$

7. Vypočítajte podiely komplexných čísel:

$$\text{a) } \frac{3+i}{2+i} = \quad \text{b) } \frac{5-4i}{1+2i} = \quad \text{c) } \frac{-1+2i}{3-i} = \quad \text{d) } \frac{5+i}{4-3i} =$$

$$\text{e) } \frac{0,5+i}{5i} = \quad \text{f) } \frac{2,8-0,4i}{-2i} = \quad \text{g) } \frac{3i}{1+i} = \quad \text{h) } \frac{-4i}{1-3i} =$$

Riešenie:

Pri podiele komplexných čísel používame rozširovanie zlomku – podielu **komplexne združeným číslom** z menovateľa zlomku.

Poznámka: komplexne združené číslo má opačné číslo v **imaginárnej** časti čísla, napríklad:

$$a = 2 - 4i \dots \text{ k nemu komplexne združené je číslo } \bar{a} = 2 + 4i$$

$$b = 3 + 5i \dots \text{ k nemu komplexne združené je číslo } \bar{b} = 3 - 5i$$

$$\text{a) } \frac{3+i}{2+i} = \frac{3+i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(3+i) \cdot (2-i)}{(2+i) \cdot (2-i)} = \frac{6-3i+2i-i^2}{2-2i+2i-i^2} = \frac{7-i}{3} = \frac{7}{3} - \frac{i}{3}$$

$$\text{b) } \frac{5-4i}{1+2i} = \frac{5-4i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{5-10i-4i-8i^2}{1-2i+2i-4i^2} = \frac{13-14i}{5} = \frac{13}{5} - \frac{14}{5}i$$

$$\text{c) } \frac{-1+2i}{3-i} = \frac{-1+2i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{-3-i+6i+2i^2}{9+3i-3i-i^2} = \frac{-5+5i}{10} = -0,5 + 0,5i$$

d)

$$\frac{5+i}{4-3i} = \frac{5+i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{20+4i+15i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{20+19i-3}{16+9} = \frac{17+19i}{25} = \frac{17}{25} + \frac{19}{25}i$$

$$\text{e) } \frac{0,5+i}{5i} = \frac{0,5+i}{5i} \cdot \frac{5i}{5i} = \frac{2,5i+5i^2}{25i^2} = \frac{2,5i-5}{-25} = \frac{2,5i}{-25} + \frac{5}{25} = 0,2 - 0,1i$$

$$\text{f) } \frac{2,8-0,4i}{-2i} = \frac{2,8-0,4i}{-2i} \cdot \frac{2i}{2i} = \frac{5,6i-0,8i^2}{-4i^2} = \frac{5,6i+0,8}{4} = \frac{5,6i}{4} + \frac{0,8}{4} = 0,2 + 1,4i$$

8. Vypočítajte:

$$\text{a) } \frac{1}{2+i} + \frac{4}{2-i} =$$

$$\text{b) } \frac{5}{1-i} - \frac{i}{2+i} =$$

$$\text{c) } \frac{5+i}{3-i} + \frac{4-i}{5+i} =$$

$$\text{d) } \frac{6-2i}{5+3i} - \frac{1-2i}{1+i} =$$

$$\text{e)} \frac{1+2i}{3i} + \frac{3-i}{2i} =$$

$$\text{f)} \frac{1-6i}{i} - \frac{2-i}{3i} =$$

9. Vypočítajte hodnotu výrazu:

$$\text{a)} \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} \quad \text{b)} \frac{z_1}{z_2 + z_3} \quad \text{c)} \frac{\overline{z_1}}{z_2 - z_3}$$

ak sú komplexné čísla $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = 5i$, $z_3 = 5 + i$.

Riešenie:

a) Do výrazu dosadíme dané čísla a postupne násobíme a určíme podiel čísel.

V tejto úlohe sú z_1, z_2, z_3 označenia komplexných čísel, nie sú to označenia reálnej a imaginárnej časti komplexného čísla.

$$\begin{aligned} \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} &= \frac{(2-4i) \cdot (5i)}{(5+i)} = \frac{10i - 20i^2}{5+i} = \frac{10i + 20}{5+i} = \\ &= \frac{10i + 20}{5+i} \cdot \frac{5-i}{5-i} = \frac{50i - 10i^2 + 100 - 20i}{25 - i^2} = \frac{30i + 10 + 100}{25 + 1} = \frac{110 + 30i}{26} = \frac{110}{26} + \frac{30}{26}i = \\ &= \frac{55}{13} + \frac{15}{13}i \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2 + z_3} &= \frac{2-4i}{5i + (5+i)} = \frac{2-4i}{5+6i} = \frac{2-4i}{5+6i} \cdot \frac{5-6i}{5-6i} = \frac{10 - 20i - 12i + 24i^2}{25 - 36i^2} = \frac{10 - 32i}{25 + 36} = \\ &= \frac{10 - 32i}{61} = \frac{10}{61} - \frac{32}{61}i \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z_1}}{z_2 - z_3} &= \frac{2+4i}{5i - (5+i)} = \frac{2+4i}{-5+4i} = \frac{2+4i}{-5+4i} \cdot \frac{-5-4i}{-5-4i} = \frac{-10 - 20i - 8i - 16i^2}{25 - 16i^2} = \frac{-10 - 28i + 16}{25 + 16} = \\ &= \frac{6 - 28i}{41} = \frac{6}{41} - \frac{28}{41}i \end{aligned}$$

Komplexné čísla sa používajú v **elektrotechnike** na riešenie obvodov napájaných striedavým prúdom. Komplexnými číslami sa vyjadrujú fázory v tzv. **zložkovom tvare** – v matematike **algebraickom tvare** $A = a + jb$.

V elektrotechnike komplexné čísla spomíname aj s pojmami impedancia, admitancia a zapisujú sa v tvare $Z = R + jX$.

Z je impedancia

R je činný odpor (rezistencia)

X je jalový odpor (reaktancia)

j je imaginárna jednotka (v matematike je i)

Poznámka: upozorňujeme, že zápis komplexného čísla $1 - 2 \cdot i$ a zápis $1 - 2i$ alebo $1 - j \cdot 2$ alebo $1 - j2$ označujú to isté komplexné číslo.

D Komplexné čísla - Goniometrický tvar

V tejto časti pracovného listu si zopakujeme:

➡ Čo je algebrický tvar komplexného čísla

➡ Znázornenie komplexného čísla v pravouhlej sústave súradníc

➡ Ako vznikol goniometrický tvar komplexného čísla

➡ Čo je algebrický tvar komplexného čísla

Algebrický tvar komplexného čísla a je zápis $a = a_1 + a_2 \cdot i$, v ktorom:

a_1 je reálna časť komplexného čísla

a_2 je Imaginárna časť komplexného čísla

$i = \sqrt{-1}$ je imaginárna jednotka

Príklady komplexných čísel:

$a = 3 + 5i$ Jeho reálna časť je $a_1 = 3$, jeho imaginárna časť je $a_2 = 5$.

$b = -2 + i$ Jeho reálna časť je $b_1 = -2$, jeho imaginárna časť je $b_2 = 1$.

$c = \sqrt{2} - i$ Jeho reálna časť je $c_1 = \sqrt{2}$, jeho imaginárna časť je $c_2 = -1$,
lebo $-1 \cdot i = -i$.

$d = \frac{i}{4}$ Jeho reálna časť je $d_1 = 0$, jeho imaginárna časť je $d_2 = \frac{1}{4}$,

lebo $\frac{1}{4} \cdot i = \frac{i}{4}$.

➡ Znázornenie komplexného čísla v pravouhlej sústave súradníc

Komplexné čísla znázorňujeme v pravouhlej sústave súradníc. Obrazom komplexného čísla je **bod** alebo **vektor**.

Reálnu časť komplexného čísla zobrazíme na os **x** (reálna os), **imaginárnu časť** komplexného čísla na os **y** (imaginárna os).

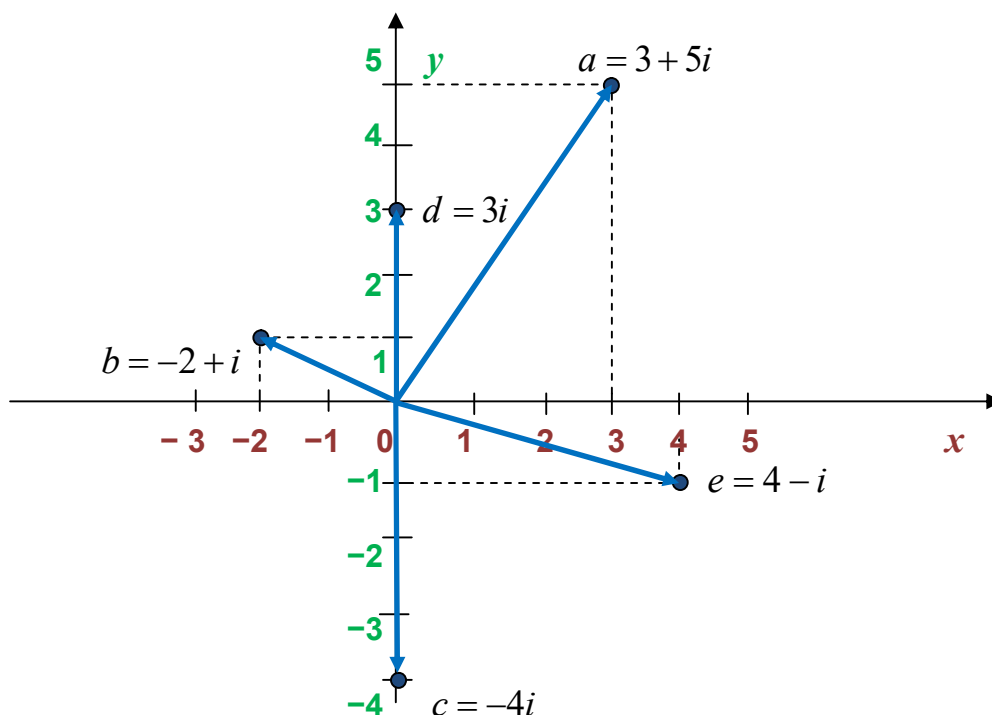
Rovinu, ktorej bodmi sú komplexné čísla, nazývame **Gaussova rovina**. Pomenovanie je po významnom matematikovi 19. storočia C. F. Gaussa.

Príklady komplexných čísel, ktoré znázorníme bodmi a vektormi:

$$a = 3 + 5i \quad b = -2 + i \quad c = -4i \quad d = 3i \quad e = 4 - i$$

Najprv určíme reálne a imaginárne časti daných komplexných čísel, potom im priradíme bod v sústave súradníc a nakoniec vektor.

Komplexné číslo	Reálna časť	Imaginárna časť
$a = 3 + 5i$	3	5
$b = -2 + i$	-2	1
$c = -4i$	0	-4
$d = 3i$	0	3
$e = 4 - i$	4	-1



C. F. Gauß (Gauss) sa narodil ako syn murára a vodného majstra. Počítať vraj vedel skôr ako hovoriť. Keď mal tri roky, opravil zle spočítanú výplatu. Ako deväťročný školák dokázal za niekoľko sekúnd správne vypočítať súčet všetkých čísel od jedna

do sto a odvodil aj všeobecný postup pre výpočet súčtu aritmetického radu. Keď to videl jeho učiteľ, hneď mu zohnal učebnicu matematiky.

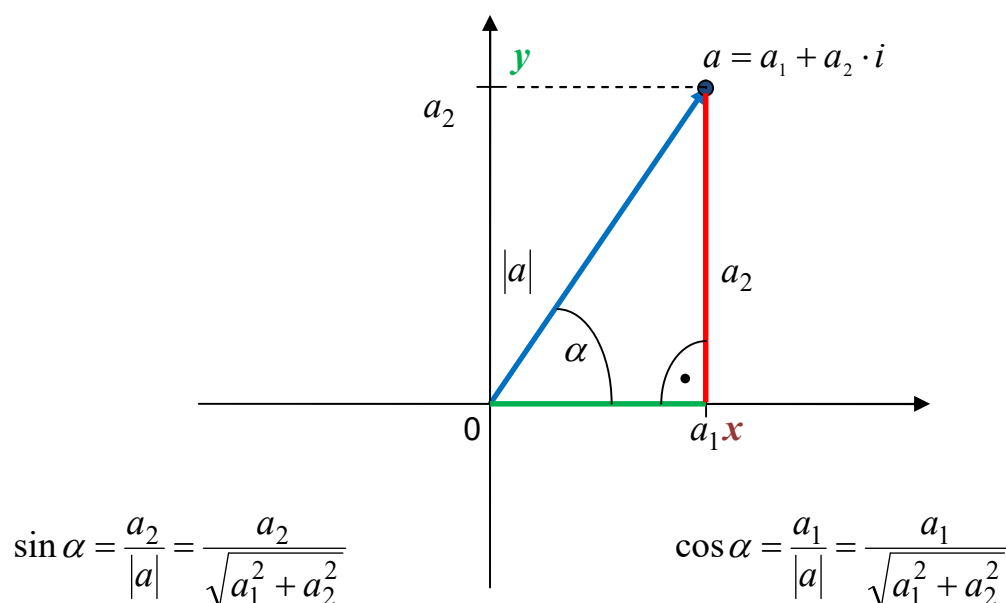
„Výsledky vlastného premýšľania sú hodnotnejšie ako všetka získaná cudzia múdrosť.“
Zdroj: Internet

➡ Ako vznikol goniometrický tvar komplexného čísla

Ak znázorníme komplexné číslo v pravouhlej sústave súradníc, získame pravouhlý trojuholník, ktorého dĺžku strán vieme určiť.

Ak označíme uhol, ktorý zvierá vektor komplexného čísla s kladnou časťou osi x , vieme reálnu aj imaginárnu časť komplexného čísla vyjadriť pomocou goniometrických funkcií tohto uhla.

Označený uhol nazývame argumentom komplexného čísla.



Poznámka:

„Sínus uhla je pomer protíľahlej odvesny k prepone pravouhlého trojuholníka.
Kosínus uhla je pomer príľahlej odvesny k prepone pravouhlého trojuholníka.“

Absolútnu hodnotu komplexného čísla určujeme z pravouhlého trojuholníka pomocou Pytagorovej vety: $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2$, potom $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Vyjadríme si zo vzťahov pre sínus a kosínus argumentu jednotlivé časti komplexného čísla a dosadíme do zápisu algebrického tvaru komplexného čísla.

$$\sin \alpha = \frac{a_2}{|a|} \Rightarrow a_2 = |a| \cdot \sin \alpha \qquad \cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} \Rightarrow a_1 = |a| \cdot \cos \alpha$$

$$a = a_1 + a_2 \cdot i$$

$$a = |a| \cdot \cos \alpha + |a| \cdot \sin \alpha \cdot i$$

Potom je **goniometrický tvar komplexného čísla** $a = |a| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$.

Príklad 1

Napíšte v goniometrickom tvare čísla: $a = 5 - 5i$, $b = 1 - \sqrt{3} \cdot i$, $c = -1 + i$.

Riešenie:

V zápise goniometrického tvaru čísla je **absolútna hodnota čísla** a **goniometrické funkcie argumentu** α .

Postupne určujeme tieto prvky riešenia úlohy.

$$a = 5 - 5i \quad \text{Reálna časť je } a_1 = 5, \text{ imaginárna časť je } a_2 = -5.$$

$$\text{Absolútna hodnota je } |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}.$$

$$\sin \alpha = \frac{a_2}{|a|} = \frac{-5}{\sqrt{50}} = \frac{-5}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-5}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Funkcia sínus nadobúda záporné hodnoty v kvadrante III., IV., preto riešením sú:

III. uhol $\alpha = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

IV. uhol $\alpha = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Funkcia kosínus nadobúda kladné hodnoty v kvadrante I., IV., preto riešením sú:

I. uhol $\alpha = 45^\circ$

IV. uhol $\alpha = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

Argumentom komplexného čísla bude uhol zo IV. kvadrantu $\alpha = 315^\circ$.

Potom **goniometrický tvar komplexného čísla** a je:

$$a = \sqrt{50} \cdot (\cos 315^\circ + i \cdot \sin 315^\circ)$$

Riešenie:

$$b = 1 - \sqrt{3} \cdot i \quad \text{Reálna časť je } b_1 = 1, \text{ imaginárna časť je } b_2 = -\sqrt{3}.$$

$$\text{Absolútna hodnota je } |b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\sin \beta = \frac{b_2}{|b|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Funkcia sínus nadobúda záporné hodnoty v kvadrante III., IV., preto riešením sú:

III. uhol $\beta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

IV. uhol $\beta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

$$\cos \beta = \frac{b_1}{|b|} = \frac{1}{2}$$

Funkcia kosínus nadobúda kladné hodnoty v kvadrante I., IV., preto riešením sú:

I. uhol $\beta = 60^\circ$

IV. uhol $\beta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

Argumentom komplexného čísla bude uhol zo IV. kvadrantu $\beta = 300^\circ$.

Potom **goniometrický tvar komplexného čísla b** je:

$$b = 2 \cdot (\cos 300^\circ + i \cdot \sin 300^\circ)$$

Riešenie:

$$c = -1 + i$$

Reálna časť je $c_1 = -1$, imaginárna časť je $c_2 = 1$.

Absolútna hodnota je $|c| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$$\sin \gamma = \frac{c_2}{|c|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Funkcia sínus nadobúda kladné hodnoty v kvadrante I., II., preto riešením sú:

I. uhol $\gamma = 45^\circ$

II. uhol $\gamma = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$$\cos \gamma = \frac{c_1}{|c|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Funkcia kosínus nadobúda záporné hodnoty v kvadrante II., III., preto riešením sú:

II. uhol $\gamma = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

III. uhol $\gamma = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

Argumentom komplexného čísla bude uhol z II. kvadrantu $\gamma = 135^\circ$.

Potom je **goniometrický tvar komplexného čísla c** :

$$c = \sqrt{2} \cdot (\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ)$$

Precvič si vedomosti riešením úloh v tomto cvičení.

Cvičenie 1

Napíšte v goniometrickom tvare čísla: $a = 4 - 4i$, $b = -1 + \sqrt{3} \cdot i$, $c = 1 - i$,
 $d = \sqrt{3} - i$, $e = -i$.

Príklad 2

Napíšte dané čísla v algebrickom tvare:

$$a = 5 \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot (\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ)$$

$$c = \sqrt{2} \cdot (\cos 210^\circ + i \cdot \sin 210^\circ)$$

$$d = 2 \cdot (\cos 315^\circ + i \cdot \sin 315^\circ)$$

Riešenie:

Algebraický tvar čísla a je zápis $a = a_1 + a_2 \cdot i$.

Takže určíme hodnotu goniometrických funkcií pre daný argument a roznásobíme zátvorku absolútnou hodnotou komplexného čísla.

$$a = 5 \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ) = 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot i$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot (\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i$$

$$c = \sqrt{2} \cdot (\cos 210^\circ + i \cdot \sin 210^\circ) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot i \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$$

$$d = 2 \cdot (\cos 315^\circ + i \cdot \sin 315^\circ) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i$$

Poznámka:

Pri riešení týchto úloh potrebujeme vedomosti o hodnotách goniometrických funkcií uhlov rôznej veľkosti. Používame preto kalkulačky alebo tabuľky.

Cvičenie 2

Napíšte dané čísla v algebraickom tvare:

$$a = 3 \cdot (\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ)$$

$$b = \frac{3}{4} \cdot (\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$$

$$c = \sqrt{3} \cdot (\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ)$$

$$d = 0,5 \cdot (\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ)$$

Príklad 3

Podiel komplexných čísel $\frac{1-i}{1+i}$ vyjadrite v goniometrickom tvare.

Riešenie:

Úlohu môžeme riešiť dvomi spôsobmi.

Prvý spôsob: vypočítame podiel čísel v algebraickom tvare a potom výsledné číslo prevedieme na tvar goniometrický.

Druhý spôsob: obe komplexné čísla prevedieme na tvar goniometrický a potom určíme podiel čísel v goniometrickom tvare.

Vzhľadom na doterajšie vedomosti použijeme prvý spôsob.

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1-2i-1}{1-(-1)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

Reálna časť je $a_1 = 0$, imaginárna časť je $a_2 = -1$.

Absolútna hodnota je $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$.

$$\sin \alpha = \frac{a_2}{|a|} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \dots\dots\dots \text{ uhol } \alpha = 270^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} = \frac{0}{1} = 0 \quad \dots\dots\dots \text{ uhol } \alpha = 90^\circ \text{ alebo } \alpha = 270^\circ$$

Argumentom komplexného čísla bude uhol $\alpha = 270^\circ$.

Potom je **goniometrický tvar podielu** $\frac{1-i}{1+i} = 1 \cdot (\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ)$

Cvičenie 3

- a) Podiel komplexných čísel $\frac{25-5i}{2-3i}$ vyjadrite v goniometrickom tvare.
- b) Podiel komplexných čísel $\frac{3i}{1+i}$ vyjadrite v goniometrickom tvare.
- c) Podiel komplexných čísel $\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$ vyjadrite v goniometrickom tvare.
- d) Podiel komplexných čísel $\frac{-i}{2+3i}$ vyjadrite v goniometrickom tvare.

Želám Ti veľa úspechov pri riešení úloh.

Ak nájdeš chybu v riešených príkladoch, napíš mi na
viera.kolbaska@gmail.com.

Neriešené cvičenia konzultuj so svojím učiteľom matematiky alebo mi
napíš,
pošlem Ti výsledky.