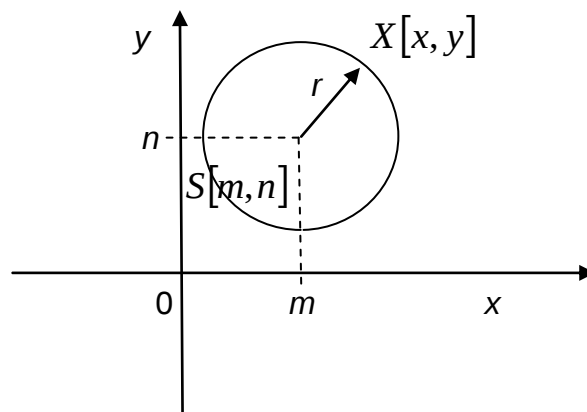


Kružnica v analytickej geometrii 2

Kružnica s **polomerom** r
so stredom v **bode** $S[m, n]$
má **rovnicu** $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$,
kde x, y sú súradnice bodu kružnice.



Uvedená rovnica je v tzv. **stredovom tvare**.

Okrem stredového tvaru rovnice kružnice poznáme aj **všeobecný tvar** rovnice kružnice. Tento tvar si ukážeme pri riešení úloh.

Pri riešení úloh o kružnici používame vzorce o **umocňovaní dvojčlena**:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

1. Napíš rovnicu kružnice, ak je daný stred a polomer kružnice.

a) $S[1, 2]$, $r = 2$

b) $S[-1, 3]$, $r = \frac{5}{7}$

c) $S[-2, -4]$, $r = \sqrt{5}$

d) $S[5, 0]$, $r = \frac{\sqrt{3}}{5}$

Riešenie:

Ukážeme si riešenie d) a uvedieme výsledky úloh a) – c).

d) Rovnica kružnice so stredom $S[m, n]$ má tvar $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$.

Do tejto rovnice dosadíme **súradnice stredu** kružnice $S[5, 0]$ a dĺžku **polomeru**

kružnice $r = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Potom: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

$$(x-5)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2$$

$$(x-5)^2 + y^2 = \frac{3}{25} \quad \longleftarrow \text{Rovnica kružnice v } \textbf{stredovom tvare}.$$

Teraz upravíme rovnicu kružnice v stredovom tvare na **všeobecný tvar**.

Najprv umocníme dvojčlen v zátvorke. Použijeme vzorec:

$$(A-B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

viera kolbaska

Potom získame rovnicu $x^2 - 10x + 25 + y^2 = \frac{3}{25}$, ktorú ďalej upravujeme:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = \frac{3}{25} \quad / \cdot 25$$

$$25x^2 - 250x + 625 + 25y^2 = 3 \quad / - 3$$

$$25x^2 + 25y^2 - 250x + 622 = 0$$

Rovnica kružnice vo **všeobecnom tvare** je $25x^2 + 25y^2 - 250x + 622 = 0$.

Riešenie:

a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

b) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{49}$, $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10\frac{25}{49} = 0$

c) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 5$, $x^2 + y^2 + 4x + 16y + 15 = 0$

2. Napíš rovnicu kružnice, ak je daný stred a priemer kružnice.

a) $S[1,0]$, $d = 8$

b) $S[0,-3]$, $d = 10,5$

c) $S[-5,4]$, $d = 4 \cdot \sqrt{7}$

d) $S[8,-3]$, $d = \frac{3\sqrt{5}}{4}$

Riešenie:

a) $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 16$, $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$

b) $(x-0)^2 + (y+3)^2 = 5,1^2$, $x^2 + y^2 + 6y - 17,01 = 0$

c) $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 28$, $x^2 + y^2 + 10x - 16y + 13 = 0$

d) $(x-8)^2 + (y+3)^2 = \frac{45}{16}$, $x^2 + y^2 - 16x + 9y + 70,1875 = 0$

3. Urč stred, polomer a priemer kružnice danej rovnicou:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 25 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 10y - 18 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 14x - 6y - 32 = 0$

d) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} - 6x + 8y - 4 = 0$

Riešenie:

Ukážeme si riešenie d) a uvedieme výsledky úloh a) – c).

Uvedené **všeobecné tvary** rovníc upravíme na **stredové tvary**.

d) Rovnicu kružnice upravíme na stredový tvar pomocou ekvivalentných úprav rovnice a vzorcov:

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A+B)^2$$

$$A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A-B)^2$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} - 6x + 8y - 4 = 0 \quad / \cdot 3$$

$$x^2 + y^2 - 18x + 24y - 12 = 0 \quad \dots \text{priradíme k sebe členy s neznámou } x$$

a s neznámou y ...

$$x^2 - 18x + y^2 + 24y - 12 = 0$$

Teraz doplníme dvojčleny s rovnakou neznámou „do štvorca“, aby sme mohli vytvoriť stredový tvar rovnice kružnice.

$$(x^2 - 18x + 9^2) + (y^2 + 24y + 12^2) - 12 = 0 + 9^2 + 12^2 \quad \dots \text{na ľavú aj pravú stranu pridáme tie isté druhé mocniny}$$

$$(x-9)^2 + (y+12)^2 - 12 = 81 + 144 \quad / + 12$$

$$(x-9)^2 + (y+12)^2 = 237$$

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

$$m = 9, \quad n = -12, \quad \text{stred kružnice } S[9, -12]$$

$$r^2 = 237, \quad \text{polomer } r = \sqrt{237} \quad \text{a} \quad \text{priemer } d = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{237}$$

Riešenie:

$$\text{a) } S[1, 0], r = \sqrt{26}, d = 2 \cdot \sqrt{26}$$

$$\text{b) } S[0, -5], r = \sqrt{43}, d = 2 \cdot \sqrt{43}$$

$$\text{c) } S[-7, 3], r = \sqrt{90} = 3 \cdot \sqrt{10}, d = 6 \cdot \sqrt{10}$$

*Nájdí chybné riešenie v niektorej z daných úloh.
Za ich nájdienie Ťa čakajú „bonusové body“.*

Tvoja učiteľka matematiky

Doplňovanie do štvorca ešte raz:

$$\begin{array}{ccc} x^2 - 18x + \dots & = & (x + \dots)^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 & = & (A - B)^2 \end{array}$$

$$A^2 = x^2 \quad 2 \cdot A \cdot B = 18x \quad B^2 = 9^2$$

$$x^2 - 18x + 9^2 = (x - 9)^2$$