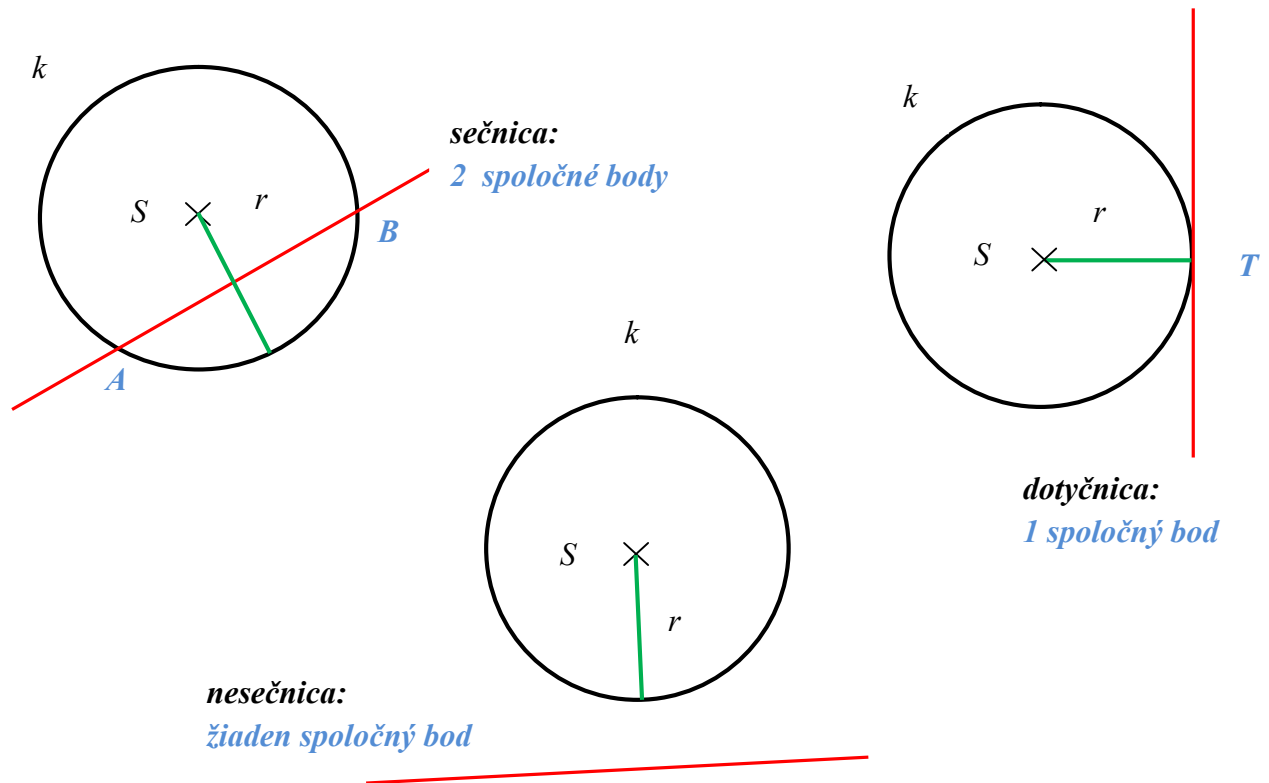


Kružnica v analytickej geometrii – vzájomná poloha priamky a kružnice

O vzájomnej polohe priamky a kružnice sme sa učili v planimetrii.

Tak ako pri vzájomnej polohe dvoch priamok sa vzájomná poloha určovala pomocou **počtu spoločných bodov**.



V základnej škole sa poloha priamky a kružnice vyjadrovala aj pomocou **vzdialenosti priamky od stredu kružnice a polomeru**.

V analytickej geometrii pracujeme s rovnicami priamky a kružnice, takže úlohy na vzájomnú polohu priamky a kružnice sa riešia **pomocou sústav rovníc**.

Podľa počtu riešení, ktoré prezentujú počet spoločných bodov, robíme záver riešenia úlohy, tzn. či **je priamka sečnicou, nesečnicou alebo dotyčnicou kružnice**.

Príklad 1A

Zistite vzájomnú polohu priamky $p : x + 2y = 0$ a kružnice $k : x^2 + y^2 = 4$.

Riešenie:

Vzájomnú polohu priamky a kružnice určujeme **podľa počtu spoločných bodov**.

Keďže spoločné body majú vyhovovať aj rovnici priamky aj rovnici kružnice, riešime **sústavu rovníc**.

Poznámka:

Priamka je daná všeobecnou rovnicou, kružnica je daná rovnicou v stredovom tvare (jej stred má súradnice $[0;0]$ a polomer 2).

Sústava rovníc:

$$p : x + 2y = 0$$

$$k : x^2 + y^2 = 4$$

Sústavu rovníc riešime dosadzovacou metódou.

Najvhodnejšie je vyjadriť z rovnice priamky niektorú z neznámych a tú dosadiť do rovnice kružnice.

$$p : x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$$

$$k : x^2 + y^2 = 4$$

Na miesto neznámej x v rovnici kružnice dosadíme výraz $-2y$.

$$k : (-2y)^2 + y^2 = 4 \text{ Riešime kvadratickú rovnicu s neznámou } y.$$

$$4y^2 + y^2 = 4$$

$$5y^2 = 4 \quad / : 5$$

$$y^2 = \frac{4}{5} \text{ Odmocníme.}$$

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} \text{ Máme dve riešenia rovnice, takže priamka je sečnicou kružnice.}$$

Ak by sme chceli vedieť súradnice spoločných bodov (priesečníkov priamky a kružnice), vypočítame aj hodnoty neznámej x .

Dosadíme vypočítané hodnoty $y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4}{5}}$ do rovnice priamky, pričom môžeme použiť vyjadrenie neznámej $x = -2y$.

$$A: y_1 = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$x_1 = -2 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} = -2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{\sqrt{5}} = -\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

$$A \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}; -\frac{4\sqrt{5}}{5} \right]$$

Pri úprave zlomkov používame usmernenie zlomku:

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$B: y_2 = -\sqrt{\frac{4}{5}}$$

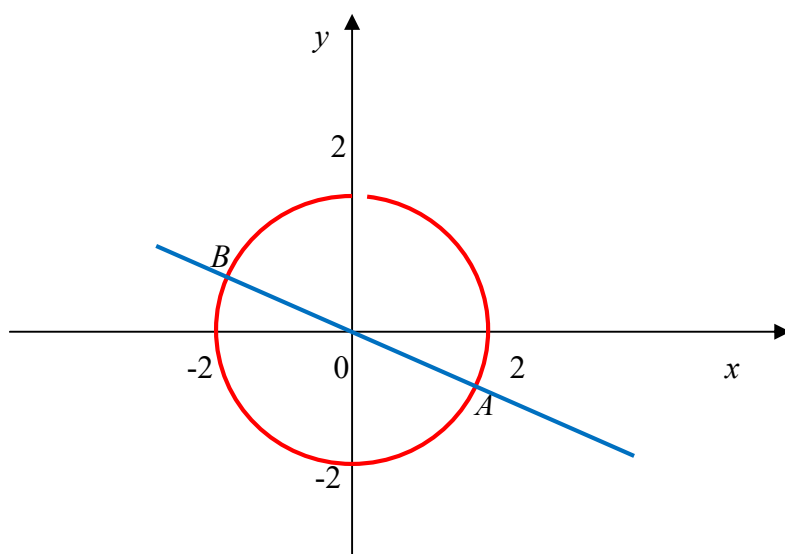
$$x_2 = -2 \cdot \left(-\sqrt{\frac{4}{5}}\right) = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

$$B \left[-\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{4\sqrt{5}}{5} \right]$$

Riešenie úlohy môžeme znázorniť jednoduchým náčrtom:

Kružnica má stred $S[0;0]$, polomer $r = 2$.

Priamku môžeme narysovať pomocou dvoch bodov, ktoré na nej ležia: $M[0;0]$, $N[1;-0,5]$.



Príklad 1B

Zistite vzájomnú polohu priamky $p: y = 2x$ a kružnice danej rovnicou $x^2 + y^2 = 125$.

Riešenie: Vytvoríme si sústavu rovníc, ktorú budeme riešiť dosadzovacou metódou.

$$x^2 + y^2 = 125$$

$$y = 2x$$

Do rovnice kružnice dosadíme za premennú y výraz $2x$.

$$x^2 + (2x)^2 = 125$$

$$x^2 + 4x^2 = 125$$

$$5x^2 = 125 \quad / : 5$$

$$x^2 = 25 \quad \implies \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \quad \text{Kvadratická rovnica má dve}$$

riešenia, priamka je **sečnicou** kružnice.

Ak chceme vedieť priesečníky priamky a kružnice, vypočítame hodnoty premennej y pre jednotlivé hodnoty x .

$$x_1 = 5 \quad y_1 = 2 \cdot 5 = 10 \quad A[5,10]$$

$$x_2 = -5 \quad y_2 = 2 \cdot (-5) = -10 \quad B[-5,-10]$$

Príklad 2

Zistite vzájomnú polohu priamky $p : x + y - 1 = 0$ a kružnice $k : x^2 + y^2 = 1$.

Riešenie:

Vzájomnú polohu priamky a kružnice určujeme **podľa počtu spoločných bodov**.

Riešime **sústavu rovníc**.

Poznámka:

Priamka je daná všeobecnou rovnicou, kružnica je daná rovnicou v stredovom tvare (jej stred má súradnice $[0;0]$ a polomer 1).

Sústava rovníc:

$$p : x + y - 1 = 0$$

$$k : x^2 + y^2 = 1$$

Sústavu rovníc riešime dosadzovacou metódou.

Vyjadríme z rovnice priamky niektorú z neznámych a tú dosadíme do rovnice kružnice.

$$p : x + y - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - y$$

$$k : x^2 + y^2 = 1$$

Na miesto neznámej x v rovnici kružnice dosadíme výraz $1 - y$.

$$(1 - y)^2 + y^2 = 1$$

Druhú mocninu dvojčlena $(1 - y)^2$ môžeme počítat' pomocou súčinu $(1 - y)^2 = (1 - y) \cdot (1 - y)$

$$(1 - y) \cdot (1 - y) + y^2 = 1$$

Roznásobíme zátvorky – „*každý člen s každým*“.

$$1 - y - y + y^2 + y^2 = 1$$

$$2y^2 - 2y = 0 \quad / : 2$$

$$y^2 - y = 0$$

Kvadratickú rovnicu môžeme riešiť rozkladom dvojčlena na súčin, alebo pomocou diskriminantu kvadratickej rovnice.

Použijeme riešenie pomocou diskriminantu.

$$1 \cdot y^2 - 1 \cdot y = 0 \Rightarrow a = 1 \quad b = -1 \quad c = 0$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$$

Keďže diskriminant je **číslo kladné**, rovnica má **dve riešenia**, takže priamka **bude sečnicou kružnice**.

Ak chceme určiť súradnice spoločných bodov, vypočítame korene rovnice:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 1}{2} \Rightarrow y_1 = 1 \quad y_2 = 0$$

Vypočítané korene kvadratickej rovnice dosadíme do rovnice priamky, a tak získame prvé súradnice spoločných bodov.

$$p : x = 1 - y$$

$$y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 1 = 0 \quad A[0;1]$$

$$y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 - 0 = 1 \quad B[1;0]$$

Priesečníkmi priamky a kružnice sú body $A[0;1]$, $B[1;0]$.

Pri riešení úloh na vzájomnú polohu priamky a kružnice je vhodné zapamätať si údaje uvedené v nasledujúcej tabuľke:

Priamka je:	Priamka má s kružnicou:	Ak má kvadratická rovnica:	Ak je diskriminant kvadratickej rovnice:
sečnica	2 spoločné body	2 riešenia	väčší ako 0
nesečnica	0 spoločných bodov	0 riešení	menší ako 0
dotyčnica	1 spoločný bod	1 riešenie	rovná sa 0

Príklad 3A

Zistite, koľko spoločných bodov má priamka $p : y = x - 3$ s kružnicou $k : x^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Riešenie:

Je dobré uvedomiť si, že priamka je daná smernicovou rovnicou a kružnica rovnicou v stredovom tvare (jej stred je $S[0;1]$ a polomer je $r = 3$).

Ak máme zistiť, **koľko spoločných bodov** má priamka s kružnicou, riešime úlohu na **vzájomnú polohu priamky a kružnice**. A tak úlohu môžeme riešiť **sústavou rovníc**.

$p : y = x - 3$ Výraz $x - 3$ dosadíme z rovnice priamky do rovnice kružnice za y .

$$k : x^2 + (y - 1)^2 = 9$$

$$k : x^2 + (x - 3 - 1)^2 = 9$$

$$k : x^2 + (x - 4)^2 = 9$$

Druhú mocninu dvojčlena môžeme počítat ako súčin tých istých dvojčlenov:

$$(x - 4)^2 = (x - 4) \cdot (x - 4) \text{ alebo použijeme vzorec } (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$k : x^2 + (x-4) \cdot (x-4) = 9$$

$$x^2 + x^2 - 4x - 4x + 16 = 9$$

Po úpravách získame kvadratickú rovnicu.

$$2x^2 - 8x + 7 = 0$$

Kvadratickú rovnicu vyriešime pomocou diskriminantu.

$$2x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad b = -8 \quad c = 7$$

Potom:

$$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 64 - 56 = 8$$

Keďže diskriminant rovnice je **kladné číslo**, rovnica bude mať **2 rôzne reálne korene**, čo znamená, že **priamka bude mať s kružnicou 2 spoločné body**.

Príklad 3B

Zistite súradnice priesečníkov priamky $p : x - y + 3 = 0$ a kružnice $k : x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Riešenie: Vytvoríme si sústavu rovníc, ktorú budeme riešiť dosadzovacou metódou.

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$x - y + 3 = 0$$

Z rovnice priamky vyjadríme premennú **y**, **$y = x + 3$** .

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$y = x + 3$$

Do rovnice kružnice dosadíme za premennú **y** výraz **$x + 3$** .

$$x^2 + (x+3)^2 - 9 = 0$$

Umocníme výraz **$x + 3$** , $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 - 9 = 0$$

$$2x^2 + 6x = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 + 3x = 0$$

Kvadratickú rovnicu môžeme riešiť pomocou diskriminantu alebo rozkladom na súčin.

Ukážeme si rozklad na súčin:

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

$$x \cdot (x+3) = 0$$

Máme vypočítané prvé súradnice spoločných bodov priamky a kružnice, vypočítame ešte druhé súradnice:

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 0 + 3 = 3$$

$$A[0,3]$$

$$x_2 = -3$$

$$y_2 = -3 + 3 = 0$$

$$B[-3,0]$$

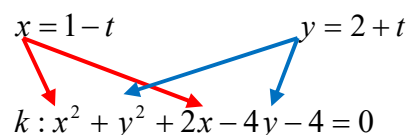
Príklad 4

Vypočítajte **veľkosť tetivy**, ktorú vytína na kružnici $k : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ priamka daná parametricky $p : x = 1 - t, y = 2 + t$.

Riešenie:

Kružnica je daná všeobecnou rovnicou, priamka je daná parametricky.

Preto je vhodné dosadiť do rovnice kružnice za neznáme x a y vyjadrenia z parametrickej rovnice.


$$x = 1 - t \quad y = 2 + t$$
$$k : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

Získame rovnicu:

$$(1 - t)^2 + (2 + t)^2 + 2 \cdot (1 - t) - 4 \cdot (2 + t) - 4 = 0$$

Umocníme a zjednodušíme rovnicu:

$$1 - 2t + t^2 + 4 + 4t + t^2 + 2 - 2t - 8 - 4t - 4 = 0$$

$$2t^2 - 4t - 5 = 0$$

Riešime pomocou diskriminantu:

$$2t^2 - 4t - 5 = 0 \quad a = 2 \quad b = -4 \quad c = -5$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 16 + 40 = 56$$

Korene rovnice sú : $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{4} = 1 \pm 0,5\sqrt{14}$

Spoločné body priamky a kružnice získame dosadením koreňov rovnice do parametrických rovníc priamky:

$$t_1 = 1 + 0,5\sqrt{14}$$

$$x = 1 - t_1 = 1 - (1 + 0,5\sqrt{14}) = -0,5\sqrt{14}$$

$$y = 2 + t_1 = 2 + (1 + 0,5\sqrt{14}) = 3 + 0,5\sqrt{14}$$

$$A[-0,5\sqrt{14}; 3 + 0,5\sqrt{14}]$$

$$t_2 = 1 - 0,5\sqrt{14}$$

$$x = 1 - t_2 = 1 - (1 - 0,5\sqrt{14}) = 0,5\sqrt{14}$$

Tetiva je časťou sečnice kružnice, je to úsečka spájajúca priesečníky priamky a kružnice.

$$y = 2 + t_2 = 2 + (1 - 0,5\sqrt{14}) = 3 - 0,5\sqrt{14}$$

$$B[0,5\sqrt{14}; 3 - 0,5\sqrt{14}]$$

Veľkosť tetivy vypočítame pomocou vzdialenosti bodov:

$$A[-0,5\sqrt{14}; 3 + 0,5\sqrt{14}], B[0,5\sqrt{14}; 3 - 0,5\sqrt{14}].$$

Cvičenie 1

Zistite vzájomnú polohu priamky a kružnice:

a) $p: y = 3x, k: x^2 + y^2 = 160$

b) $p: y = -2x, k: x^2 + y^2 = 80$

c) $p: y = 5x, k: x^2 + y^2 - 26 = 0$

d) $p: y = -4x, k: x^2 + y^2 - 68 = 0$

Cvičenie 2

Zistite súradnice priesečníkov priamky a kružnice.

a) $p: x + y - 4 = 0, k: x^2 + y^2 - 8 = 0$

b) $p: x + y = 2, k: x^2 + y^2 - 4 = 0$

c) $p: 2x + y = 0, k: x^2 + y^2 = 3$

d) $p: x - y - 1 = 0, k: x^2 + y^2 = 5$

Cvičenie 3

Zistite súradnice priesečníkov priamky a kružnice.

a) $p: x = 1 - t, y = 2 + t, k: x^2 + y^2 - 8 = 0$

b) $p: x = t, y = -1 - 2t, k: x^2 + y^2 - 4 = 0$

c) $p: x = 4, k: x^2 + y^2 = 25$

d) $p: y = \sqrt{2}, k: x^2 + y^2 = 5$