Kvadratická funkcia

Učili sme sa riešiť kvadratickú rovnicu a nerovnicu.
Pri riešení týchto úloh sme najčastejšie používali:

diskriminant $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

vzťahy pre korene $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$

Koeficienty *a*, *b*, *c* sme určovali z trojčlena

$ax^2 + bx + c$

Kvadratická funkcia obsahuje taký istý **trojčlen** ako kvadratická rovnica a nerovnica.

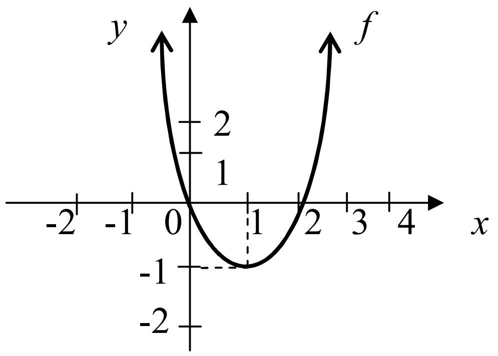
Kvadratická funkcia *f* s premennou *x* je funkcia daná rovnicou:

$f : y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

ax^2 ..... kvadratický člen
bx .... lineárny člen
c .... absolútny člen

Grafom kvadratickej funkcie je vzhľadom na jej definičný obor **parabola** alebo jej časti.

Z **grafu funkcie** sme určovali definičný obor, obor hodnôt, monotónnosť, paritu, ohraničenosť; zisťovali sme, či je funkcia prostá alebo nie je prostá.
Napríklad:



Poznámka:
Do definičného oboru patria hodnoty **argumentu *x*.**
Do oboru hodnôt patria **funkčné hodnoty *y*.**

D(f)	*H(f)*	Ohr. dolné	Ohr. horné	Rastúca pre *x*	Klesajúca pre *x*	Párna	Nepárna	Prostá
R	$\langle -1; \infty)$	-1	Nemá.	$\langle 1; \infty)$	$(-\infty; 1)$	Nie je.	Nie je.	Nie je.

Poznámka:
Funkcia **je párna**, ak je jej graf symetrický podľa osi ***y***.
Funkcia **je nepárna**, ak je jej graf symetrický podľa začiatku sústavy súradníc – **bodu** $0[0;0]$.
Funkcia **je prostá** vtedy, ak je na celom definičnom obore **len rastúca**, alebo **len klesajúca**.

Príklad 1 Uveďte, ktorá z daných funkcií je kvadratickou funkciou.

$f_1 : y = x \cdot (x-4)$ $\quad f_2 : y = 2x - 4$ $\quad f_3 : y = (x-3)^2 - 5$ $\quad f_4 : y = x \cdot (x+1) - x^2$

Riešenie:

Pri zisťovaní, či funkcia je funkciou kvadratickou, **upravujeme výraz s premennou *x*** vo funkcii na **trojčlen** $ax^2 + bx + c$.

Ak sa výraz **upraviť na tento trojčlen dá**, tak funkcia **je funkciou kvadratickou**.

$f_1 : y = x \cdot (x-4) = x^2 - 4x$

Získaný dvojčlen $x^2 - 4x$

upravíme na trojčlen $1 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 0$

v ktorom $a = 1;\ \ b = -4;\ \ c = 0$.

Poznámka:

len $a \neq 0$.

$f_1 : y = x \cdot (x-4)$ **je kvadratickou funkciou.**

$f_2 : y = 2x - 4$

Táto funkcia sa nedá upraviť na trojčlen, je to funkcia **typu** $y = ax + b$.

To znamená, že funkcia $f_2 : y = 2x - 4$ **je funkcia lineárna**.

$f_3 : y = (x-3)^2 - 5 = (x-3) \cdot (x-3) - 5 = x^2 - 6x + 9 - 5 = x^2 - 6x + 4$

Úpravou výrazu $(x-3)^2 - 5$ sme získali **trojčlen** $x^2 - 6x + 4$, v ktorom $a = 1;\ \ b = -6;\ \ c = 4$.

Preto $f_3 : y = (x-3)^2 - 5$ **je kvadratickou funkciou.**

$f_4 : y = x \cdot (x+1) - x^2 = x^2 + x - x^2 = x$

Úpravou výrazu $x \cdot (x+1) - x^2$ sme získali funkciu $f_4 : y = x$, funkciu **typu** $y = kx$.

To znamená, že funkcia $f_4 : y = x \cdot (x+1) - x^2$ **je funkcia priamej úmernosti**.

Príklad 2

Narysujte grafy kvadratických funkcií. Určte ich obory, ohraničenosť, monotónnosť, paritu. Uveďte, či je funkcia prostá. Funkcie sú definované pre $x \in R$.

$g_1 : y = x^2 - 2x - 3$ $\quad g_2 : y = x^2 + 2x$ $\quad g_3 : y = -x^2 - 1$ $\quad g_4 : y = -\dfrac{x^2}{4}$

Riešenie 2:

Grafy daných kvadratických funkcií budeme zostrojovať pomocou **troch hodnôt** daných funkcií:

- **pomocou nulových bodov funkcie** (sú spravidla dva a sú to zvyčajne korene kvadratickej rovnice $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$)
- **pomocou vrcholu paraboly** (vrchol tvorí „*akoby stred symetrie*“, preto je jeho ***x*** – ová súradnica v strede medzi x_1 a x_2; platí pre ňu vzťah $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$)

Body pre graf si zvyčajne dávame do tabuľky.

$\boldsymbol{x}$	$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$
$y = f(x)$	$y_2 = f(x_2)$	$y_0 = f(x_0)$	$y_1 = f(x_1)$

Zostrojíme si graf prvej funkcie $g_1 : y = x^2 - 2x - 3$.

Určíme si postupne:

- **nulové body funkcie**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -1$$

Výpočet **diskriminantu**:

$a = 1;\quad b = -2;\quad c = -3$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

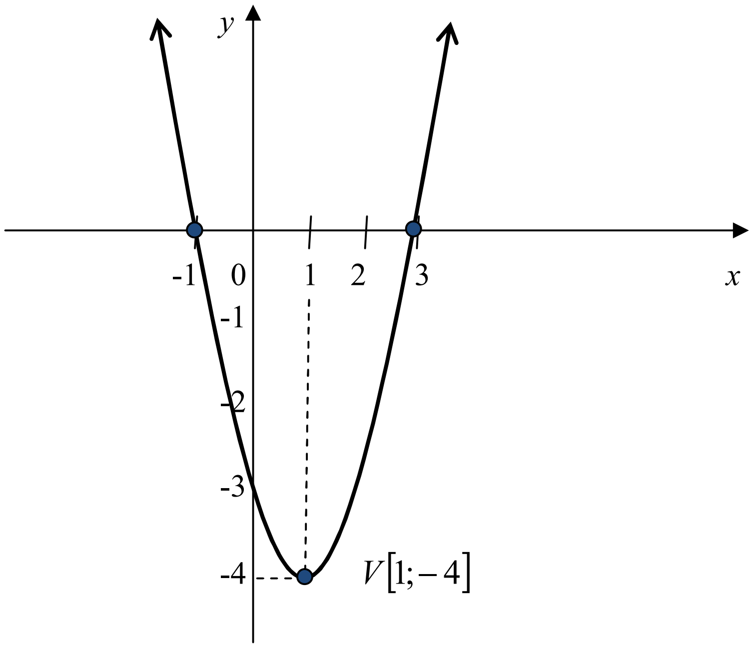
$$D = 4 + 12 = 16$$

- **vrchol paraboly**

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1 \qquad y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4 \qquad V[1; -4]$$

$\boldsymbol{x}$	$x_2 = -1$	$x_0 = 1$	$x_1 = 3$
$y = x^2 - 2x - 3$	$y_2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$	$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$	$y_1 = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$

Poznámka: Tieto dve hodnoty nebolo treba počítať, hovoríme o **nulových bodoch** funkcie.



$D(g_1)$	$H(g_1)$	Ohr. d	Ohr. h	Rastúca pre x	Klesajúca pre x	Párna	Nepárna	Prostá
R	$\langle -4;\infty)$	-4	Nemá.	$\langle 1;\infty)$	$(-\infty;1)$	Nie je.	Nie je.	Nie je.

Poznámka:

Rovnicu funkcie $g_1: y = x^2 - 2x - 3$ vieme pomocou **vrcholu paraboly** zapísať aj v tvare $g_1: y = (x-1)^2 - 4$.

Pre kvadratickú funkciu platí: $y = ax^2 + bx + c = a \cdot (x-m)^2 + n$, kde $V[m;n]$.

$g_2: y = x^2 + 2x$

Potrebné výpočty:

- **diskriminant**: $y = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 0 \rightarrow a = 1;\quad b = 2;\quad c = 0$

  $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 4$
- **nulové body funkcie**

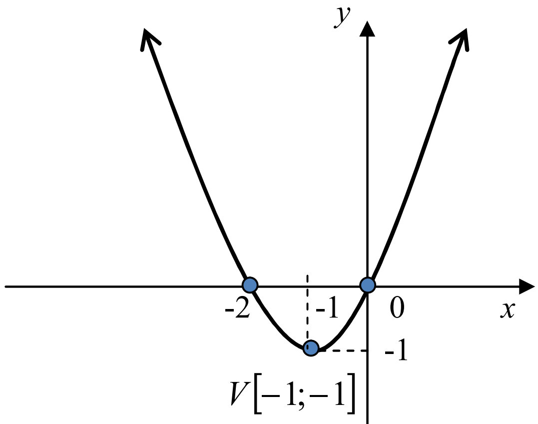
  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 2}{2}$$

  $x_1 = 0$

  $x_2 = -2$
- **vrchol paraboly**

  $$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1 \qquad y_0 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = 1 - 2 = -1 \qquad V[-1;-1]$$

x	$x_2 = -2$	$x_0 = -1$	$x_1 = 0$
$g_2 : y = x^2 + 2x$	0	-1	0



$D(g_2)$	$H(g_2)$	Ohr. d	Ohr. h	Rastúca pre x	Klesajúca pre x	Párna	Nepárna	Prostá
R	$\langle -1;\infty)$	-1	Nemá.	$\langle -1;\infty)$	$(-\infty;-1)$	Nie je.	Nie je.	Nie je.

Poznámka: Rovnicu funkcie $g_2 : y = x^2 + 2x$ vieme pomocou **vrcholu paraboly** zapísať aj v tvare $g_2 : y = (x+1)^2 - 1$.

$g_3 : y = -x^2 - 1$

Potrebné výpočty:

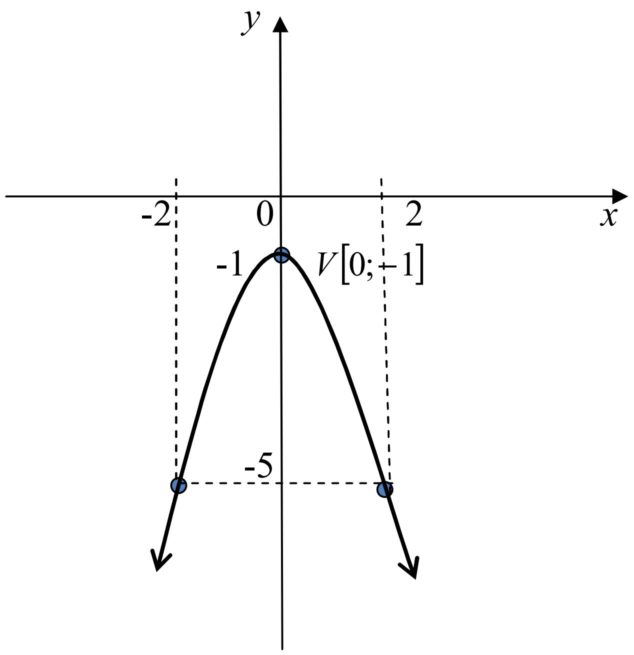
- **diskriminant**: $y = -1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1 \longrightarrow a = -1; \quad b = 0; \quad c = -1$

  $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -4$
- **nulové body funkcie**
  - funkcia nulové body – priesečníky s osou x **– nemá (diskriminant je záporný)**
  - do tabuľky si vyberieme 2 *body symetrické* s ***x***-ovou súradnicou vrcholu paraboly
- **vrchol paraboly**

  $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot (-1)} = 0 \qquad y_0 = -0^2 - 1 = -1 \qquad V[0;-1]$

symetricky rozložené k 0

x	$x_2 = -2$	$x_0 = 0$	$x_1 = +2$
$g_3 : y = -x^2 - 1$	$y_2 = -(-2)^2 - 1$ $y_2 = -4 - 1 = -5$	-1	$y_1 = -(+2)^2 - 1$ $y_1 = -4 - 1 = -5$



$D(g_3)$	$H(g_3)$	Ohr. d	Ohr. h	Rastúca pre x	Klesajúca pre x	Párna	Nepárna	Prostá
R	$(-\infty;-1\rangle$	Nemá.	-1	$(-\infty;1)$	$\langle 1;\infty)$	Je.	Nie je.	Nie je.

Poznámka: Rovnicu funkcie $g_3: y = -x^2 - 1$ vieme pomocou **vrcholu paraboly** zapísať aj v tvare $g_3: y = -1 \cdot (x-0)^2 - 1$.

$$g_4: y = -\frac{x^2}{4}$$

Potrebné výpočty:

- **diskriminant**: $y = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \longrightarrow \quad a = -\frac{1}{4}; \;\; b = 0; \;\; c = 0$

  $$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 0 = 0$$

- **nulové body funkcie**
  - funkcia má jeden nulový bod – priesečník s osou x **(diskriminant je 0)**

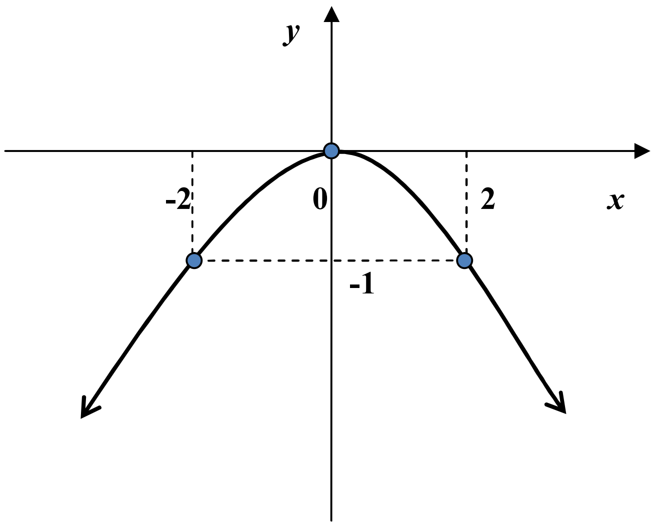
    $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-0{,}25)} = 0$$

  - do tabuľky si vyberieme 2 *body symetrické* s ***x***-ovou súradnicou vrcholu paraboly
- **vrchol paraboly**

  $$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot (-0{,}25)} = 0 \qquad y_0 = -0^2 = 0 \qquad V[0;0]$$

symetricky rozložené k 0

x	$x_2 = -2$	$x_0 = 0$	$x_1 = +2$
$g_4 : y = -\frac{x^2}{4}$	$y_2 = -\frac{(-2)^2}{4}$ $y_2 = -1$	0	$y_1 = -\frac{(+2)^2}{4}$ $y_1 = -1$



$D(g_4)$	$H(g_4)$	Ohr. d	Ohr. h	Rastúca pre *x*	Klesajúca pre *x*	Párna	Nepárna	Prostá
R	$(-\infty;0\rangle$	Nemá.	0	$(-\infty;0)$	$\langle 0;\infty)$	Je.	Nie je.	Nie je.

Poznámka: Rovnicu funkcie $g_4 : y = -\frac{x^2}{4}$ vieme pomocou **vrcholu paraboly** zapísať aj v tvare $g_3 : y = -\frac{1}{4}\cdot(x-0)^2 + 0$.

Cvičenie 2

Narysujte grafy kvadratických funkcií. Určte ich obory, ohraničenosť, monotónnosť, paritu. Uveďte, či je funkcia prostá. Funkcie sú definované pre $x \in R$.

$h_1 : y = x^2 + 4x - 5$ $\quad h_2 : y = x^2 - 6x$ $\quad h_3 : y = -3x^2$ $\quad h_4 : y = -2x^2 + 4x$

Príklad 3

Určte, pre aké hodnoty *x* má funkcia $y = x^2 + 4x - 5$ hodnotu $y = 0$.

Riešenie:

Určiť, pre **aké hodnoty argumentu *x*** má funkcia **hodnotu *y* = 0,** je to isté, ako počítať **nulové body pre graf funkcie** alebo **priesečníky grafu funkcie s osou x.**

To znamená, že riešime rovnicu $0 = x^2 + 4x - 5$. Jej riešením je $x_1 = 1$ a $x_2 = -5$.

Príklad 4

Určte **priesečníky** grafu funkcie $y = 2x - 3x^2$ s **osou *x***.

Riešenie:

Určiť **priesečníky grafu funkcie s osou *x*** sústavy súradníc, znamená určiť **nulové body** danej funkcie.

Potrebné výpočty:

- **diskriminant**: $y = 2x - 3x^2 = -3x^2 + 2x \longrightarrow \quad a = -3; \; b = 2; \; c = 0$

  $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 0 = 4$

- **nulové body funkcie – priesečníky s osou *x***:

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-2 \pm 2}{2 \cdot (-3)}$$

  $$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 0 \,; \; \boxed{P_1[0;0]}$$

  $$x_2 = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad y_2 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} - \frac{12}{9} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0 \quad \boxed{P_2\left[\frac{2}{3};0\right]}$$

Priesečníky grafu funkcie $y = 2x - 3x^2$ s osou x sú $\boxed{P_1[0;0]}, \boxed{P_2\left[\frac{2}{3};0\right]}$.

Poznámka:

$y_{1,2}$ nie je potrebné počítať, ale výpočet môžeme brať ako skúšku správnosti riešenia úlohy.

Príklad 5

Určte **priesečník grafu** funkcie $y = -3x^2 + 12$ s **osou *y***.

Riešenie:

Určiť **priesečník grafu funkcie s osou *y*** sústavy súradníc, znamená **zistiť hodnotu funkcie pre *x* = 0**.

Potrebné výpočty:

$$y = -3x^2 + 12 = -3 \cdot 0^2 + 12 = 12$$

Priesečník grafu funkcie $y = -3x^2 + 12$ s **osou *y*** je $\boxed{P_y[0;12]}$.

Príklad 6

Zistite, či **usporiadaná dvojica** $[-3;-1]$ **patrí** funkcii $f: y = -3x^2 + 12$.

Riešenie:

Tak ako pri riešení úloh v lineárnej funkcii a konštantnej funkcii, do rovnice funkcie dosadíme hodnotu ***x*, vypočítame hodnotu *y*, ktorú porovnáme s hodnotou *y*** v danej dvojici.

Ak sa vypočítaná hodnota *y*, rovná hodnote *y* v dvojici, tak dvojica funkcii patrí.

$$\overset{x}{[-3};\overset{y}{-1]}$$ ... premenná $x=-3$, $y=-1$

Premennú ***x*** dosadíme do rovnice funkcie $f: y=-3x^2+12$.

$$y=-3(-3)^2+12$$
$$y=-3\cdot 9+12$$
$$y=-27+12$$
$$y=-15 \qquad -15\neq -1$$

Keďže vypočítaná hodnota y sa nerovná hodnote y z dvojice, dvojica $[-3;-1]$ **nepatrí** funkcii $f: y=-3x^2+12$.

Vyriešte úlohy v testíku.
Ak chcete vedieť správne riešenia, napíšte mi.
Ďalšie úlohy nájdete v zbierke č. 1, od str. 223.

Testík

1. Hodnota kvadratickej funkcie $y=x^2-6x+5$ pre $x=-\frac{1}{2}$ je:

A $\frac{7}{4}$ **B** $\frac{59}{12}$ **C** $\frac{9}{4}$ **D** $-\frac{7}{4}$

2. Funkcia $y=x^2+4x-5$ má $y=0$ pre:

A $x_1=-5$, $x_2=1$ **B** $x_1=5$, $x_2=-1$
C $x_1=4$, $x_2=-5$ **D** $x_1=x_2=2$

3. Jeden z priesečníkov funkcie $y=2x-3x^2$ s osou x je:

A $P_x\left[0;\frac{2}{3}\right]$ **B** $P_x\left[\frac{2}{3};0\right]$ **C** $P_x\left[\frac{3}{2};0\right]$ **D** $P_x[-1;0]$

4. Priesečník funkcie $y=\frac{x^2-4}{5}$ s osou y je:

A $P_y\left[0;\frac{4}{5}\right]$ **B** $P_y\left[-\frac{4}{5};0\right]$ **C** $P_y\left[\frac{4}{5};0\right]$ **D** $P_y\left[0;-\frac{4}{5}\right]$

5. Funkcii $y=(x-4)\cdot(x+3)$ patrí usporiadaná dvojica:

A $[-1;10]$ **B** $[1;-12]$ **C** $[-1;-10]$ **D** $[1;12]$

6. Usporiadaná dvojica $[-2;-1]$ patrí funkcii:

A $y=3x^2$ **B** $y=3-x^2$ **C** $y=x^2-3x$ **D** $y=x-3x^2$

7. Funkcia $y = ax^2 + 4x - 1$ je kvadratická, ak:

A $a = 0$ **B** $a \neq 0$ **C** $a \in \{0\}$ **D** $a \in \emptyset$

8. Kvadratická závislosť je:
A závislosť obsahu štvorca S od dĺžky jeho strany
B závislosť dráhy auta od rýchlosti
C závislosť obvodu kruhu od dĺžky priemeru
D závislosť hmotnosti telesa od jeho objemu

9. Vrchol grafu kvadratickej funkcie $f : y = x^2 - 2x$ má súradnice:

A $[1;-1]$ **B** $[0;-2]$ **C** $[-2;0]$ **D** $[-1;1]$

10. Vrchol grafu kvadratickej funkcie $f : y = 4 - x^2 - 2x$ má súradnice:

A $[4;-2]$ **B** $[-1;5]$ **C** $[-1;7]$ **D** $[-2;4]$

11. O kvadratickej funkcii $f : y = 9 - x^2$ platí:

A je klesajúca na intervale $(-\infty; 0\rangle$
B vrchol grafu má súradnice $[0;9]$
C je rastúca na intervale $\langle -3;3 \rangle$
D jej lineárny člen je $-x$

12. Kvadratická funkcia $f : y = x^2 + 16$ je rastúca na intervale:

A $(-\infty; 0\rangle$ **B** $\langle 0; \infty)$ **C** $\langle -4;4 \rangle$ **D** $\langle 16; \infty)$

13. Kvadratická funkcia $f : y = 2x^2 + 4x + 2$ je klesajúca na intervale:

A $(-\infty; -1\rangle$ **B** $\langle -1; \infty)$ **C** R **D** $\langle -2; \infty)$

14. Kvadratická funkcia $f : y = -x^2 + 4x$ je rastúca pre:
A x väčšie ako 2
B x menšie ako 2
C $x \in R$
D x väčšie ako 4