

Lineárna funkcia

Lineárnou funkciou nazývame každú funkciu $y = ax + b, x \in R$, kde a je reálne číslo rôzne od nuly, b je ľubovoľné reálne číslo.

Niekedy používame definíciu s rovnicou $y = kx + q, x \in R$, kde k je reálne číslo rôzne od nuly, q je ľubovoľné reálne číslo.

⇒ ax nazývame **lineárny člen**

⇒ b nazývame **absolútny člen**

Príklady lineárnych funkcií

Funkcia	Koeficient a	Absolútny člen b
$y = 3x + 2$	3	2
$y = -2x + 1$	- 2	1
$y = \frac{3x}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
$y = -1,2x$	- 1,2	0
$y = \frac{x + 2}{4}$	0,25	0,5

Graf lineárnej funkcie závisí od **definičného oboru funkcie**.

Pre $x \in R$ je to vždy **priamka**.

Pokiaľ je definičný obor funkcie časť množiny reálnych čísel, grafom je potom **úsečka**, **polpriamka** alebo množina **izolovaných bodov**.

Príklad 1

Narysujte grafy funkcií:

a) $y = 3x + 2, x \in R$ b) $y = -2x + 1, x \in (-3; 4)$ c) $y = \frac{x + 2}{4}, x \in (-\infty; -2)$

Určte ich definičné obory (D) a obory hodnôt (H) a množiny, na ktorých sú rastúce alebo klesajúce. Napíšte, či sú párne alebo nepárne, prosté, ohraničené.

Riešenie:

a) **Funkcia má** $D = R$. Tzn. grafom lineárnej funkcie bude **priamka**.

Na jej zostrojenie potrebujeme dva body.

Výhodné je zvoliť si **priesečníky** grafu funkcie s osou x (**nulové body** funkcie) a **priesečníky** grafu funkcie s osou y sústavy súradníc.

Priesečník s osou y :

$$x = 0$$

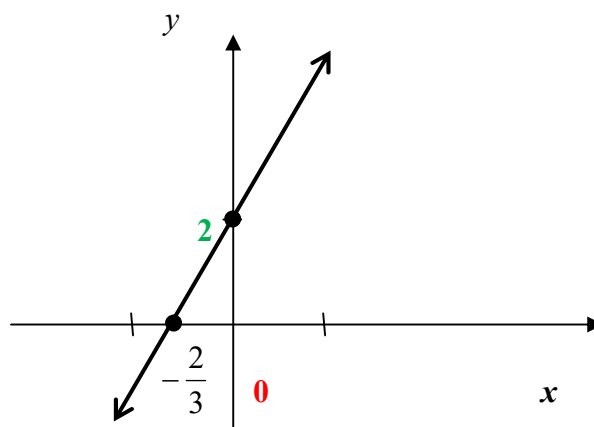
$$y = 3x + 2 = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

Priesečník s osou x :

$$y = 0 \Rightarrow y = 3x + 2$$

$$0 = 3x + 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

x	0	$-\frac{2}{3}$
$y = 3x + 2$	2	0



Definičný obor (D), obor hodnôt (H) a množiny, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, vlastnosti (či je párna alebo nepárna, prostá, ohraničená) zapíšeme do tabuľky.

D	H	rastúca	klesajúca	ohraničená zdola	ohraničená zhora	párna	nepárna	prostá
R	R	R	nie	nie	nie	nie	nie	je na R

Pripomeňme si:

Funkcia je **prostá** na svojom definičnom obore, ak je len rastúca alebo len klesajúca na tomto obore.

Funkcia je **párna** na svojom definičnom obore, ak je jej graf symetrický podľa osi y .

Funkcia je **nepárna** na svojom definičnom obore, ak je jej graf symetrický podľa **stredy** sústavy súradníc.

b) $y = -2x + 1, x \in (-3; 4)$

Keďže **definičný obor funkcie** je interval $D = (-3; 4)$, grafom tejto funkcie bude **úsečka**.

Úsečku určujú jej **koncové body**, ktoré vypočítame pomocou „začiatku a konca“ intervalu.

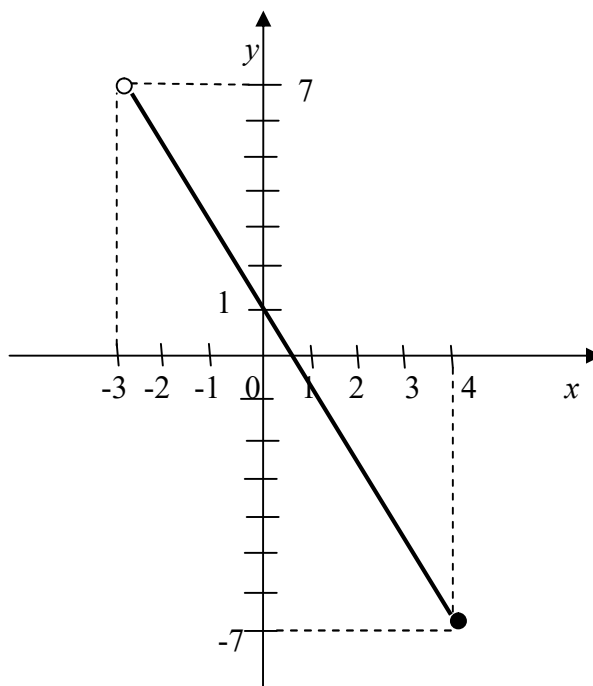
$$x = -3$$

$$y = -2x + 1 = -2 \cdot (-3) + 1 = 7$$

$$x = 4$$

$$y = -2x + 1 = -2 \cdot 4 + 1 = -7$$

x	-3	4
$y = -2x + 1$	7	-7



Poznámka:

Interval môže byť otvorený, uzavretý,

Otvorený interval v našej úlohe je zľava (**okrúhla zátvorka**).

Ak je **otvorený**, úsečka na grafe je **ukončená prázdny krúžkom**.

Interval je **uzavretý** sprava (**špicatá zátvorka**).

Ak je **uzavretý**, úsečka na grafe je **ukončená plným krúžkom**.

D	H	rastúca	klesajúca	ohraničená zdola	ohraničená zhora	párna	nepárna	prostá
$(-3; 4)$	$\langle -7; 7 \rangle$	nie	$(-3; 4)$	-7	7	nie	nie	je na $(-3; 4)$

c) $y = \frac{x+2}{4}, x \in (-\infty; -2\rangle$

Keďže **definičný obor funkcie** je interval obsahujúci symbol „*nekonečna*“ $D = (-\infty; -2\rangle$ grafom tejto funkcie bude **polpriamka** (kvôli nekonečnu).

Úsečku určujú jej koncové body, pre polpriamku vyberáme body z intervalu – jeden koncový (začiatočný, podľa druhu intervalu) a druhý priamo z intervalu.

V našom prípade vyberáme $x = -2$ a $x = -3$.

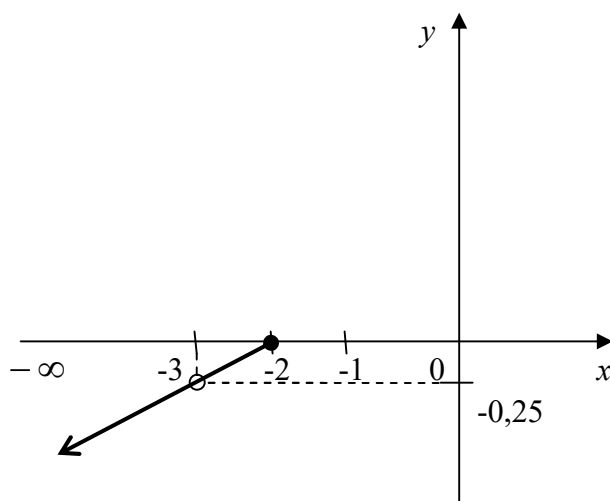
$$x = -3$$

$$y = \frac{x+2}{4} = \frac{-3+2}{4} = \frac{-1}{4} = -0,25$$

$$x = -2$$

$$y = \frac{x+2}{4} = \frac{-2+2}{4} = 0$$

x	-3	-2
$y = \frac{x+2}{4}$	-0,25	0



D	H	rastúca	klesajúca	d	h	párna	nepárna	prostá
$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -0,25; \infty)$	$(-\infty; -2\rangle$	nie	nie	0	nie	nie	je na $(-\infty; -2\rangle$

Poznámka:

V tejto úlohe sme použili na označenie:

dolné ohraničenie - d,

horné ohraničenie - h.

Cvičenie 1

Narysujte grafy daných funkcií. Určte ich definičné obory (D) a obory hodnôt (H) a množiny, na ktorých sú rastúce alebo klesajúce. Napíšte, či sú párne alebo nepárne, prosté, ohraničené.

a) $f : y = 2x - 4, x \in R$

b) $g : y = -x + 3, x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c) $h : y = \frac{x+1}{3}, x \in \langle -4; 5 \rangle$

d) $k : y = 3 - 2x, x \in (2; \infty)$

Príklad 2

Vypočítajte hodnoty danej funkcie pre určené hodnoty argumentu x .

$$f : y = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \quad x = 0; -2; \frac{3}{4}$$

Riešenie:

Vypočítať hodnotu funkcie znamená **určiť hodnotu y** .

Úlohu potom riešime dosadením hodnoty premennej x do výrazu v rovnici funkcie y (tak, ako počítame hodnoty do tabuľky pre graf funkcie).

$$x = 0$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{0}{2} - \frac{1}{8} = 0 - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

Hodnota pre $x = 0$ sa rovná $-\frac{1}{8} = -0,125$.

$$x = -2$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{-2}{2} - \frac{1}{8} = -1 - \frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$$

Hodnota pre $x = -2$ sa rovná $-\frac{9}{8} = -1,125$.

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{\frac{3}{4}}{2} - \frac{1}{8} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{1}} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Hodnota pre $x = \frac{3}{4}$ sa rovná $\frac{1}{4} = 0,25$.

Cvičenie 2

2. 1 Daná je lineárna funkcia $y = -5x + 2$.

Vypočítajte hodnoty tejto funkcie postupne pre čísla 0; 0,1; -5; $\frac{2}{5}$.

2. 2 Daná je funkcia $y = \frac{x-3}{4}, x \in \langle -5; 7 \rangle$.

a) Vypočítajte hodnoty tejto funkcie postupne pre čísla 0; -1; 4; 8; $1\frac{2}{3}$.

b) Uveďte príklady troch hodnôt argumentu funkcie, pre ktoré nemôžeme určiť hodnotu funkcie.

Príklad 3

Zistite, ktorá z usporiadaných dvojíc $[-6; -19]$, $[0; -1]$, $\left[\frac{1}{3}; 0\right]$ patrí funkcii

$$g: y = 3x - 1, x \in (-6; 4).$$

Riešenie:

Pri riešení tejto úlohy si treba pripomenúť, že každá dvojica, každý bod má súradnice x a y . Takže do rovnice funkcie dosadíme hodnotu x , vypočítame hodnotu y , ktorú porovnáme s hodnotou y v danej dvojici.

Ak sa vypočítaná hodnota y , rovná hodnote y v dvojici, tak dvojica funkcii patrí.

Pri riešení úlohy nezabudneme overiť, či hodnota x z dvojice patrí do definičného oboru funkcie.

$\begin{matrix} x & y \\ [-6; -19] \end{matrix}$... premenná $x = -6$ **nepatrí do definičného oboru $D = (-6; 4)$** , usporiadaná dvojica $[-6; -19]$ **nepatrí funkcii g .**

$\begin{matrix} x & y \\ [0; -1] \end{matrix}$... premenná $x = 0$ **patrí do definičného oboru $D = (-6; 4)$**
Počítame hodnotu y :
 $y = 3x - 1 = 3 \cdot 0 - 1 = -1$
 $y = -1$
Dvojica $[0; -1]$ **patrí funkcii g .**

$\begin{matrix} x & y \\ \left[\frac{1}{3}; 0\right] \end{matrix}$... premenná $x = \frac{1}{3}$ **patrí do definičného oboru $D = (-6; 4)$**
Počítame hodnotu y :
 $y = 3x - 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 1 - 1 = 0$
 $y = 0$
Dvojica $\left[\frac{1}{3}; 0\right]$ **patrí funkcii g .**

Cvičenie 3

Zistite, ktorá z usporiadaných dvojíc patrí danej funkcii.

a) $f: y = 2x - 4$, $[-2; -8]$, $[0; -2]$, $x \in (-5; \infty)$

b) $g: y = -x + 3$, $[1; 2]$, $[0; -3]$, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c) $h: y = \frac{x+1}{3}$, $[-1; 0]$, $[5; 2]$, $x \in \langle -4; 5 \rangle$

d) $k: y = 3 - 2x$, $[0; 3]$, $[3; -3]$, $x \in (2; \infty)$

Príklad 4

Napíšte **rovniciu lineárnej funkcie**, ktorej patria usporiadané dvojice $[-1; -4]$ a $[1; +5]$.

Riešenie:

Rovnica lineárnej funkcie je $y = ax + b$.

Máme teda určiť neznáme a a b .

Keďže každá usporiadaná dvojica obsahuje premenné x a y , dosadíme ich do rovnice

$y = ax + b$ a tak určíme neznáme a a b .

$$\begin{array}{cc} x & y \\ [-1; -4] & \end{array} \quad \begin{array}{c} y = ax + b \\ \downarrow \quad \searrow \\ -4 = a \cdot (-1) + b \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x & y \\ [1; +5] & \end{array} \quad \begin{array}{c} y = ax + b \\ \downarrow \quad \searrow \\ +5 = a \cdot 1 + b \end{array}$$

Vznikli **dve rovnice s dvomi neznámymi** - tzn. **sústava dvoch rovníc s dvomi neznámymi**.

Túto sústavu vyriešime **sčítacou metódou**.

$$\begin{array}{r} -4 = a \cdot (-1) + b \\ +5 = a \cdot 1 + b \\ \hline \end{array}$$

Sústavu si zapíšeme „typicky“ – **vľavo neznáme, vpravo konštanty**.

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{Sčítame rovnice}} \left\{ \begin{array}{r} a \cdot (-1) + b = -4 \\ a \cdot 1 + b = +5 \\ \hline -a + b = -4 \\ a + b = 5 \\ \hline 0 + 2b = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \Rightarrow 2b = 1 \\ b = 0,5 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \begin{array}{l} a + b = 5 \\ a + 0,5 = 5 \\ a = 4,5 \end{array} \end{array}$$

Potom rovnica funkcie je: $y = ax + b \Rightarrow y = 4,5x + 0,5$.

Cvičenie 4

Napíšte **rovniciu lineárnej funkcie**:

a) ktorej patria usporiadané dvojice $[2; -3]$ a $[-4; -1]$

b) do grafu ktorej patria body $A[-7; 0]$ a $B[0; 3]$

*Učivo si môžete precvičiť riešením úloh zo zbierky pre SOŠ 1. časť úlohami
od str. 152 po str. 158.*

Testík na overenie vedomostí.

1. Lineárnou funkciou reálnej premennej x je

A: $y = \frac{3x}{4} + 1$

B: $y = \frac{3}{x+1}$

C: $y = \frac{x-1}{4x+2}$

D: $y = \frac{2}{x} + 1$

2. Do grafu lineárnej funkcie $y = -1 + 2x$ nepatrí bod

A $[0;5;0]$

B $[-1;-3]$

C $[0;0]$

D $[-2;-5]$

3. Usporiadaná dvojica $[-4;9]$ patrí lineárnej funkcii

A: $y = 5x - 4$

B: $y = -2x + 1$

C: $y = 9 + x$

D: $y = x - 5$

4. Hodnota funkcie $f : y = 3x + 5$ pre $x = -5$ je

A: 0

B: $-\frac{10}{3}$

C: 20

D: -10

5. Obor hodnôt funkcie $h : y = \frac{x-1}{3}, x \in \langle -2; 4 \rangle$ je

A: $(-1;1)$

B: R

C: $\langle -1;1 \rangle$

D: $\langle 1;3 \rangle$

6. Z funkcií A – D je funkciou rastúcou

A: $y = \frac{3x}{4} + 1$

B: $y = 1 - 3,5x$

C: $y = -1 + (-2x)$

D: $y = \frac{1}{2} - x$

7. Z funkcií A – D je funkciou klesajúcou

A: $y = \frac{3+x}{2}$

B: $y = 2,7x - 0,3$

C: $y = \frac{5}{6} - 3x$

D: $y = -(-2x)$