

Lineárne nerovnice

A opakovanie zo ZŠ B so súčinom dvojčlenov a s druhou mocninou dvojčlena

Číselné obory (množiny), v ktorých lineárne nerovnice riešime:

N ... prirodzené čísla, napr. 1, 2, 3, 4, 5,

Z ... celé čísla:

kladné, napr. 1, 2, 3, 4, 5,

záporné, napr. -1, -2, -3, -4, -5,

nula = 0

Q ... racionálne čísla, tzn. čísla, ktoré vieme zapísať v tvare zlomku

$$\text{napr. } 2 = \frac{4}{2}, \quad -1 = \frac{-5}{5}, \quad 0 = \frac{12}{12}; \quad 0,2 = \frac{1}{5} \dots\dots$$

I ... iracionálne čísla, napr. $\sqrt{5}$; $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; π ;

R ... reálne čísla, sú to všetky racionálne a iracionálne čísla, napr. 1, 2, 0,

$$\frac{1}{2}, \quad \sqrt{5}; \quad -0,4; \quad \frac{\sqrt[3]{4}}{5} \dots\dots$$

Pri riešení nerovnic využívame ekvivalentné úpravy, ktoré poznáme z riešenia rovníc a dôsledkové úpravy:

1. K oboj stranám nerovnice môžeme pripočítať celistvý výraz
2. Od oboj strán nerovnice môžeme odpočítať celistvý výraz
3. Obe strany nerovnice môžeme vynásobiť kladným číslom
4. Obe strany nerovnice môžeme podeliť kladným číslom

Násobenie a delenie nerovnice záporným číslom vyžaduje doplnkové početové operácie.

A Riešte dané nerovnice v uvedených číselných oboroch (množinách), riešenie vyznačte na číselnej osi.

1. $3x - 4 \leq 11$; $x \in N$

Riešenie:

$$3x - 4 \leq 11 \quad /+ 4$$

$$3x \leq 15 \quad /: 3$$

$$x \leq 5$$

Čítame: x je menšie alebo sa rovná 5.

Riešením nerovnice v obore prirodzených čísel N sú čísla 1, 2, 3, 4, 5.

Zápis riešenia nerovnice: $x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Znázornenie na číselnej osi:



2. $2x+9 \leq 3; x \in \mathbb{Z}$

Riešenie:

$$2x+9 \leq 3 \quad /-9$$

$$2x \leq -6 \quad /:2$$

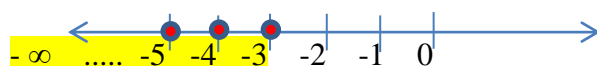
$$x \leq -3$$

Čítame: x je menšie alebo sa rovná -3 .

Riešením nerovnice v obore celých čísel \mathbb{Z} sú čísla $-3, -4, -5, \dots, -\infty$.

Zápis riešenia nerovnice: $x \in \{-3; -4; -5; \dots; -\infty\}$ alebo $x \in \{-\infty; \dots; -5; -4; -3\}$

Znázornenie na číselnej osi:



3. $5 \cdot (x+1) > 2x+5; x \in \mathbb{N}$

Riešenie:

$$5 \cdot (x+1) > 2x+5 \quad \text{Roznásobíme zátvorku.}$$

$$5x+5 > 2x+5 \quad /-5$$

$$5x > 2x \quad /-2x$$

$$3x > 0 \quad /:3$$

$$x > 0$$

Čítame: x je väčšie ako 0 .

Riešením nerovnice v obore prirodzených čísel \mathbb{N} sú všetky čísla, ktoré patria do \mathbb{N} : $1, 2, 3, 4, 5, \dots, +\infty$.

Zápis riešenia nerovnice: $x \in \mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots; +\infty\}$

Znázornenie na číselnej osi:



4. $x - (x+2) > x+3; x \in \mathbb{Z}$

Riešenie:

$$x - (x+2) > x+3 \quad \text{„Otvoríme zátvorku“.}$$

$$x - x - 2 > x+3 \quad \text{Upravíme ľavú stranu nerovnice.}$$

$$-2 > x+3 \quad /-3$$

$$-5 > x$$

Čítame: x je menšie ako -5 .

Riešením nerovnice v obore celých čísel \mathbb{Z} sú čísla $-6, -7, -8, \dots, -\infty$.

Zápis riešenia nerovnice: $x \in \{-6; -7; -8; \dots; -\infty\}$ alebo $x \in \{-\infty; \dots; -8; -7; -6\}$

Znázornenie na číselnej osi:



$$5. 2 \cdot (1 - 3x) - 4 \geq 2x; x \in R$$

Riešenie:

$$2 \cdot (1 - 3x) - 4 \geq 2x \quad \text{Roznásobíme zátvorku.}$$

$$2 - 6x - 4 \geq 2x \quad /+6x$$

$$-2 \geq 8x \quad /:8$$

$$-\frac{2}{8} \geq x$$

Zlomok upravíme na základný tvar.

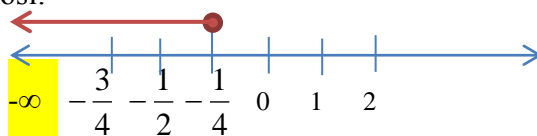
$$-\frac{1}{4} \geq x$$

Čítame: x je menšie alebo sa rovná $-\frac{1}{4}$.

Riešenie nerovnice v obore reálnych čísel R sa v základnej škole znázorňovalo na číselnej osi a zapisovalo sa pomocou intervalu – časti číselnej osi.

Zápis riešenia nerovnice: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$.

Znázornenie na číselnej osi:



Ak je v nerovnici **neostrý znak** nerovnosti (\leq, \geq), tak sa použije v zápise intervalu „špicatá zátvorka“ a v znázornení **plný krúžok**.

$$6. \frac{x+1}{3} \geq -2; x \in R$$

Riešenie:

Obe strany nerovnice vynásobíme menovateľom zlomku.

$$\frac{x+1}{3} \geq -2 \quad / \cdot 3$$

$$x+1 \geq -6 \quad / -1$$

$$x \geq -7$$

Čítame: x je väčšie alebo sa rovná -7 .

Zápis riešenia nerovnice riešenej v R : $x \in \langle -7; +\infty \rangle$.

Znázornenie na číselnej osi:



Ukážeme si násobenie postupne:

$$\frac{x+1}{3} \geq -2 \quad / \cdot 3$$

$$3 \cdot \frac{x+1}{3} \geq -2 \cdot 3$$

$$x+1 \geq -6$$

$$7. \frac{x}{3} - \frac{x+3}{2} < \frac{1}{6}; x \in R$$

Riešenie:

Obe strany nerovnice vynásobíme najmenším spoločným menovateľom, tzn. číslom 6.

$$\frac{x}{3} - \frac{x+3}{2} < \frac{1}{6} \quad / \cdot 6$$

$$2x - 3 \cdot (x + 3) < 1$$

Roznásobíme zátvorku:

$$2x - 3x - 9 < 1$$

Upravíme ľavú stranu nerovnice:

$$-x - 9 < 1$$

Vyjadríme neznámu:

$$-x - 9 < 1 \quad / + 9$$

$$-x < 10 \quad / \cdot (-1)$$

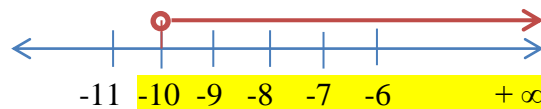
Znak nerovnosti „**otáčame**“, lebo násobíme záporným číslom.

$$x > -10$$

Čítame: x je väčšie ako -10 .

Zápis riešenia nerovnice riešenej v R : $x \in (-10; +\infty)$.

Znázornenie na číselnej osi:



Násobenie nerovnice si ukážeme postupne:

$$\frac{x}{3} - \frac{x+3}{2} < \frac{1}{6} \quad / \cdot 6$$

$$6 \cdot \frac{x}{3} - 6 \cdot \frac{x+3}{2} < 6 \cdot \frac{1}{6}$$

Zlomky vykrátíme:

$$2 \cdot x - 3 \cdot (x+3) < 1 \cdot 1$$

Ak je v nerovnici **ostrý znak** nerovnosti ($<$; $>$), tak sa použije v zápise intervalu „**okružla zátvorka**“ a v znázornení **prázdny krúžok**.

Cvičenie 1

Riešte uvedené nerovnice v daných číselných oboroch. Riešenie znázorníte na číselnej osi.

a) $3 \cdot (x+1) - (x+5) \leq 0$; $x \in N$

b) $-2 \cdot (1-3x) \geq x-5$; $x \in Z$

c) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} > -2$; $x \in R$

d) $\frac{x}{5} - \frac{1+x}{6} < \frac{1}{10}$; $x \in R$

B **Riešte dané nerovnice** v uvedených číselných oboroch (množinách), riešenie vyznačte na číselnej osi.

1. $(x-4) \cdot (x+2) \leq x^2 + 1$; $x \in N$

Riešenie:

$$(x-4) \cdot (x+2) \leq x^2 + 1$$

Roznásobíme zátvorku systémom „každý člen s každým členom“.

$$x^2 - 4x + 2x - 8 \leq x^2 + 1$$

Upravíme ľavú stranu nerovnice:

$$x^2 - 2x - 8 \leq x^2 + 1$$

Vyjadríme si neznámu.

$$x^2 - 2x - 8 \leq x^2 + 1 \quad / - x^2 + 8$$

$$-2x \leq 9 \quad / : (-2)$$

Zmeníme znak nerovnosti na opačný (lebo delíme záporným číslom).

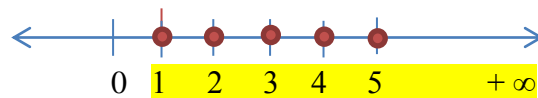
$$x \geq -4,5$$

Čítame: x je väčšie alebo sa rovná $-4,5$.

Riešením sú všetky prirodzené čísla.

Zápis riešenia nerovnice riešenej v N : $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; \dots; +\infty\} = N$.

Znázornenie na číselnej osi:



2. $2x \cdot (x+2) \leq -x \cdot (3-2x)$; $x \in Z$

Riešenie:

$$2x \cdot (x+2) \leq -x \cdot (3-2x)$$

Roznásobíme zátvorky.

$$2x^2 + 4x \leq -3x + 2x^2$$

Vyjadríme neznámu.

$$2x^2 + 4x \leq -3x + 2x^2 \quad /-2x^2 -3x$$

$$7x \leq 0 \quad /:7$$

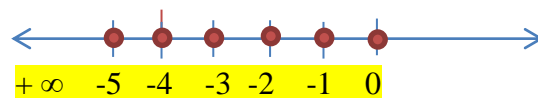
$$x \leq 0$$

Čítame: x je menšie alebo sa rovná 0 .

Riešením sú všetky záporné čísla a číslo 0 .

Zápis riešenia nerovnice riešenej v Z : $x \in \{0; -1; -2; -3; -4; -5; \dots; -\infty\} = Z_0^-$.

Znázornenie na číselnej osi:



3. $(x+2)^2 < (x+3)^2$; $x \in R$

Riešenie:

$$(x+2)^2 < (x+3)^2$$

Dvojčleny umocníme podľa vzorca $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

$$x^2 + 4x + 4 < x^2 + 6x + 9$$

Vyjadríme neznámu.

$$x^2 + 4x + 4 < x^2 + 6x + 9 \quad /-x^2 -4 -6x$$

$$-2x < 5$$

Delíme záporným číslom, meníme znak nerovnosti na opačný.

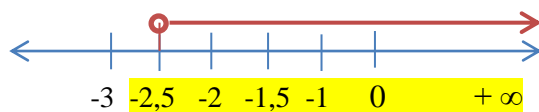
$$-2x < 5 \quad /:(-2)$$

$$x > -2,5$$

Čítame: x je väčšie ako $-2,5$.

Zápis riešenia nerovnice riešenej v R : $x \in (-2,5; +\infty)$.

Znázornenie na číselnej osi:



4. $(1-3x)^2 \leq 9 \cdot (x-2)^2$; $x \in R$

Riešenie:

$$(1-3x)^2 \leq 9 \cdot (x-2)^2$$

Umocníme dvojčleny podľa vzorca $(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$1 - 6x + 9x^2 \leq 9 \cdot (x^2 - 4x + 4)$$

Roznásobíme pravú stranu nerovnice.

$$1 - 6x + 9x^2 \leq 9x^2 - 36x + 36$$

Vyjadríme neznámu.

$$1 - 6x + 9x^2 \leq 9x^2 - 36x + 36 \quad /-1-9x^2 + 36x$$

$$30x \leq 35 \quad /:30$$

$$x \leq \frac{35}{30}$$

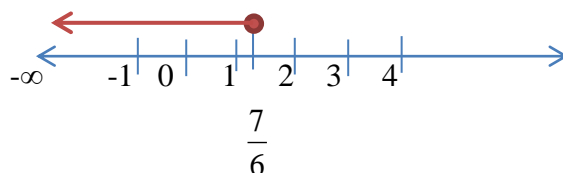
Zlomok vyjadríme v základnom tvare.

$$x \leq \frac{7}{6}$$

Čítame: x je menšie alebo sa rovná $\frac{7}{6}$.

Zápis riešenia nerovnice: $x \in \left(-\infty; \frac{7}{6}\right]$.

Znázornenie na číselnej osi:



Cvičenie 2

Riešte uvedené nerovnice v daných číselných oboroch. Riešenie znázorníte na číselnej osi.

a) $(x+5)^2 \leq (1+x)^2$; $x \in N$

b) $4 \cdot (1-x)^2 \geq (2x-5)^2$; $x \in Z$

c) $(x-4) \cdot (x+4) > x \cdot (x+3)$; $x \in R$

d) $(2x-4) \cdot (x+2) < 2 \cdot (x-3)^2 + 5x - 1$; $x \in R$

Želám príjemné precvičenie učiva.
Úlohy podobného typu nájdete aj v zbierke č. 1 pre SOŠ.