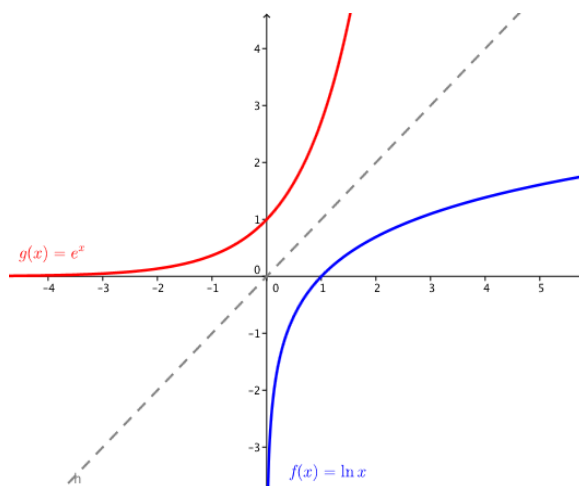


Logaritmické rovnice



Logaritmické rovnice si pre naše potreby rozčleníme do niekoľkých skupín.

Prvú skupinu budú tvoriť logaritmické rovnice, pri riešení ktorých budem vychádzať priamo z definovania logaritmu čísla.

Druhú skupinu budú tvoriť rovnice, v ktorých použijeme postup nazvaný logaritmovanie.

Tretiu skupinu budú tvoriť exponenciálne rovnice, ktoré riešime spravidla pomocou dekadického logaritmu.

1. skupina logaritmických rovníc

Najprv si pripomenieme logaritmus čísla.

Logaritmus so základom **a** čísla **x** sa rovná takému číslu **y**, pre ktoré platí

$$a^y = x.$$

Pri riešení úloh s logaritmom čísla sme si vytvorili schému:

$$\log_a x = y \quad a^y = x$$

Potom platilo:

$$\log_3 9 = 2 \quad \text{preto, lebo } 3^2 = 9$$

$$\log_3 1 = 0 \quad \text{preto, lebo } 3^0 = 1$$

$$\log_3 3 = 1 \quad \text{preto, lebo } 3^1 = 3$$

$$\log_3 \frac{1}{27} = -3 \quad \text{preto, lebo } 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

Riešme teraz logaritmické rovnice **1. skupiny**.

Dané rovnice riešte v množine reálnych čísel:

1. a) $\log_3(x-4) = -2$ **b)** $\log_{\frac{2}{3}}(5x+3) = 0$ **c)** $\log_5(x-3) = 1$

d) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x+1}{5}\right) = -1$ **e)** $\log_2(1-4x) = 0$ **f)** $\log_{0,4}(0,2-4x) = 3$

Riešenie:

Vyriešime sú úlohu a) a b), ďalšie sa pokúste vyriešiť samostatne.

a) $\log_3(x-4) = -2$

Platí $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Potom $x-4 = \frac{1}{9}$ a riešime len lineárnu rovnicu s jednou neznámou.

Použijeme spôsob, pri ktorom robíme najmenej chýb.

$$x-4 = \frac{1}{9} \quad / \cdot 9$$

$$9x-36 = 1 \quad / + 36$$

$$9x = 37 \quad / : 9$$

$$x = \frac{37}{9}$$

Pri riešení logaritmických rovníc zvykneme určiť definičný obor rovnice, tzn. „podmienku existencie logaritmu v rovnici“.

Pre neznámu x má platiť: $x-4 > 0$, tzn. $x > 4$, $x \in (4, \infty)$.

Kedže $\frac{37}{9} \in (4, \infty)$, tak je aj riešením rovnice.

$$\text{b) } \log_2(5x+3) = 0$$

$$\text{Platí } \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1.$$

Potom $5x+3=1$ a riešime znovu lineárnu rovnicu s jednou neznámou.

$$5x+3=1 \quad /-3$$

$$5x=-2 \quad /:5$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

Pre neznámu x má platiť: $5x+3>0$, tzn. $x > -\frac{3}{5}$, $x \in \left(-\frac{3}{5}, \infty\right)$.

Keďže zlomok $-\frac{2}{5} \in \left(-\frac{3}{5}, \infty\right)$, tak je aj riešením rovnice.

$$\text{2. a) } \log_2(x^2-3)=0 \quad \text{b) } \log_4(x^2+3x)=1 \quad \text{c) } \log_6 x^2=4$$

Riešenie:

Vyriešime úlohu b), ďalšie sa pokúste vyriešiť samostatne.

$$\text{b) } \log_4(x^2+3x)=1$$

$$\text{Platí } 4^1 = 4.$$

Potom $x^2+3x=4$ a riešime kvadratickú rovnicu s jednou neznámou.

Vždy použijeme spôsob, pri ktorom robíme najmenej chýb.

$$x^2+3x=4 \quad /-4$$

$$x^2+3x-4=0$$

Vyriešme úlohu pomocou **diskriminantu kvadratickej rovnice**.

Pripomeňme si vzorce:

$$ax^2+bx+c=0 \quad D=b^2-4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Potom:

$$a=1 \quad b=3 \quad c=-4 \quad D=3^2-4\cdot 1\cdot (-4)=25$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3\pm 5}{2}$$

$$x_1=1 \quad x_2=-4$$

Podmienka pre logaritmus:

Pre neznámu x má platiť: $x^2+3x>0$.

Teraz nebudeme zisťovať interval pre neznámu x , vypočítané korene jednoducho dosadíme do nerovnice a overíme, či ju spĺňajú.

$$x_1=1 \quad 1^2+3\cdot 1=4 \quad 4>0$$

$$x_2=-4 \quad (-4)^2+3\cdot (-4)=16-12=4>0$$

Zistili sme, že oba korene vyhovujú nerovnici $x^2+3x>0$, takže sú riešením danej rovnice.

2. skupina logaritmických rovníc

Mali by sme riešiť rovnicu $\log_2(x-1)+\log_2(x-2)=1$.

Na ľavej strane sú dva logaritmy a my riešili sme rovnice, v ktorých bol len jeden logaritmus. Takže pri riešení tohto typu rovníc upravíme ľavú stranu pomocou vzorcov pre logaritmy tak, aby sme získali na každej strane len jeden logaritmus.

Všimnite si nasledujúce vzťahy pre mocniny a potom vzťahy pre logaritmy.

Určite si všimnete **inverznosť** týchto vzťahov:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	$\log_a r + \log_a s = \log_a r \cdot s$
$a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	$\log_a r - \log_a s = \log_a \frac{r}{s}$
$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$	$\log_a r^s = s \cdot \log_a r$

Vyriešme si v množine reálnych čísel pomocou týchto vzťahov niekoľko rovníc.

3. a) $\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$ b) $\log_{0,5}(4x-7) - \log_{0,5}(x-3) = -1$

c) $\log_5 x^2 - 3 \cdot \log_5 x + 2 = 0$ d) $\log_{\frac{2}{5}}(x+4)^8 = -16$

Riešenie:

a) $\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$

Upravíme si ľavú stranu rovnice – použijeme prvý vzťah.

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$$

$$\log_2(x-1) \cdot (x-2) = 1$$

Potom použijeme vzťah pre výpočet logaritmu čísla.

Platí $2^1 = 2$.

Potom $(x-1) \cdot (x-2) = 2$ a riešime kvadratickú rovnicu s jednou neznámou.

Vždy použijeme spôsob, pri ktorom robíme najmenej chýb.

$$(x-1) \cdot (x-2) = 2 \quad \text{Roznásobíme zátvorky.}$$

$$x^2 - 2x - x + 2 = 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 2 \quad / -2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

Rovnicu môžeme riešiť pomocou **diskriminantu kvadratickej rovnice** alebo použitím **rozkladu dvojčlena na súčin**.

Teraz použijeme rozklad na súčin: $x^2 - 3x = 0$
 $x \cdot (x-3) = 0$

Získali sme súčin, ktorý sa rovná nule, ak sa jeden alebo druhý činiteľ rovnajú nule.

Potom:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 3$$

Podmienka pre existenciu logaritmov v rovnici:

$$x-1 > 0 \text{ a súčasne } x-2 > 0$$

Po vyriešení nerovníc platí, že $x \in (2, \infty)$.

Keďže $0 \notin (2, \infty)$ a $3 \in (2, \infty)$, tak riešením rovnice je len číslo 3.

b) $\log_{0,5}(4x - 7) - \log_{0,5}(x - 3) = -1$

Upravíme si ľavú stranu rovnice – použijeme druhý vzťah.

$$\log_{0,5}(4x - 7) - \log_{0,5}(x - 3) = -1$$

$$\log_{0,5} \frac{4x - 7}{x - 3} = -1$$

Potom použijeme vzťah pre výpočet logaritmu čísla.

Platí $0,5^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^1 = 2$.

Potom $\frac{4x - 7}{x - 3} = 2$ a riešime rovnicu s jednou neznámou.

Použijeme spôsob, pri ktorom robíme najmenej chýb.

$$\frac{4x - 7}{x - 3} = 2 \quad / \cdot (x - 3) \quad \text{Rovnicu násobíme najmenším spoločným}$$

násobkom za podmienky, že $x \neq 3$.

$$4x - 7 = 2 \cdot (x - 3)$$

$$4x - 7 = 2x - 6 \quad / - 2x + 7$$

$$2x = 1 \quad / : 2$$

$$x = 0,5$$

Podmienka pre existenciu logaritmov v rovnici: $4x - 7 > 0$ a súčasne $x - 3 > 0$.

Po vyriešení nerovníc platí, že $x \in (3, \infty)$.

Keďže $0,5 \notin (3, \infty)$, tak rovnica nemá riešenie v množine reálnych čísel.

c) $\log_5 x^2 - 3 \cdot \log_5 x + 2 = 0$

Upravíme si ľavú stranu rovnice – použijeme tretí vzťah pre prvý logaritmus.

$$2 \cdot \log_5 x - 3 \cdot \log_5 x + 2 = 0 \quad \text{Sčítame rovnaké logaritmy.}$$

$$-\log_5 x + 2 = 0 \quad / - 2$$

$$-\log_5 x = -2 \quad / \cdot (-1)$$

$$\log_5 x = 2$$

Potom použijeme vzťah pre výpočet logaritmu čísla.

$$\text{Platí } \begin{cases} 5^2 = x \\ x = 25 \end{cases}.$$

Podmienka pre existenciu logaritmov v rovnici: $x > 0$, tzn. $x \in (0, \infty)$.

Keďže $25 \in (0, \infty)$, tak **je riešením** danej rovnice.

$$\text{d) } \log_{\frac{2}{5}}(x+4)^8 = -16$$

Upravíme si ľavú stranu rovnice – použijeme tretí vzťah pre prvý logaritmus.

$$8 \cdot \log_{\frac{2}{5}}(x+4) = -16 \quad / : 8$$

$$\log_{\frac{2}{5}}(x+4) = -2$$

Potom použijeme vzťah pre výpočet logaritmu čísla.

$$\text{Platí } \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = x+4$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = x+4$$

$$\frac{25}{4} = x+4 \quad / - 4$$

$$\frac{25}{4} - 4 = x$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Podmienka pre existenciu logaritmov v rovnici: $x+4 > 0$, tzn. $x \in (-4, \infty)$.

Keďže $\frac{9}{4} \in (-4, \infty)$, tak **je riešením** danej rovnice.

Na základe poznatkov z riešenia predchádzajúcich úloh pokúste sa vyriešiť tieto cvičenia.

Riešte v množine reálnych čísel:

1. $\log_4(x+3) = -1$

2. $\log_{\frac{3}{5}}(x^2 - 8) = 0$

3. $\log_{0,4}(x^2 - 1) = 2$

4. $\log_2(2+x) + \log_2(x-2) = 5$

5. $\log_4(x-5) = 1 - \log_4(x+6)$

6. $\log_3(4x-1) - \log_3(x+5) = 2$

7. $\log_{0,5}(5+x) = 3 + \log_{0,5}(x-4)$

8. $4 \cdot \log_{10} x - \log_{10} x^3 - 6 = 0$

9. $\log(4x+3)^6 = 24$

Ak chcete vedieť výsledky tohto cvičenia, napíšte na mail:

viera.kolbaska@gmail.com.

