

Logaritmus čísla

Logaritmus čísla odvodzujeme najčastejšie pomocou logaritmickej funkcie. Pozrime sa na tabuľky niektorých logaritmických funkcií a na zápis hodnôt týchto funkcií pre niektoré hodnoty premennej x .

Tabuľka niektorých dvojíc pre graf **logaritmickej funkcie** $y = \log_2 x$ zostrojená pomocou hodnôt inverznej **exponenciálnej funkcie** $y = 2^x$ je táto:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2

Hodnoty logaritmickej funkcie pre premennú x môžeme považovať za **logaritmy príslušných čísel**:

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2 \quad \text{preto, lebo} \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1 \quad \text{preto, lebo} \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 1 = 0 \quad \text{preto, lebo} \quad 2^0 = 1$$

$$\log_2 2 = 1 \quad \text{preto, lebo} \quad 2^1 = 2$$

$$\log_2 4 = 2 \quad \text{preto, lebo} \quad 2^2 = 4$$

1. Vypočítaj hodnoty logaritmických funkcií (urč logaritmus čísla):

a) $\log_2 32$ b) $\log_2 8$ c) $\log_2 64$

d) $\log_2 \frac{1}{16}$ e) $\log_2 \frac{1}{32}$ f) $\log_2 \frac{1}{128}$

Riešenie:

Ukážeme si riešenie a) a f).

a) $\log_2 32$ Pýtame sa: „2 na koľkú je 32?“

Odpoveď: „2 na piatu je 32.“

Potom $\log_2 32 = 5$, lebo $2^5 = 32$.

$$f) \log_2 \frac{1}{128}$$

Pýtame sa: „2 na koľkú je $\frac{1}{128}$?“

Odpoveď: „2 na -7 je $\frac{1}{128}$ “

Potom $\log_2 \frac{1}{128} = -7$, lebo $2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$.

Riešenia: b) $\log_2 8 = 3$ c) $\log_2 64 = 6$ d) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ e) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

Tabuľka niektorých dvojíc pre graf **logaritmickej funkcie** $y = \log_{\frac{3}{4}} x$ zostrojená

pomocou hodnôt inverznej **exponenciálnej funkcie** $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ je táto:

x	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$
$y = \log_{\frac{3}{4}} x$	-2	-1	0	1	2

Hodnoty **logaritmickej funkcie pre premennú x môžeme považovať za logaritmy** príslušných čísel:

$$\log_{\frac{3}{4}} \frac{16}{9} = -2 \quad \text{preto, lebo} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$\log_{\frac{3}{4}} \frac{4}{3} = -1 \quad \text{preto, lebo} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^1 = \frac{4}{3}$$

$$\log_{\frac{3}{4}} 1 = 0 \quad \text{preto, lebo} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$$

$$\log_{\frac{3}{4}} \frac{3}{4} = 1 \quad \text{preto, lebo} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$$

$$\log_{\frac{3}{4}} \frac{9}{16} = 2 \quad \text{preto, lebo} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

2. Vypočítaj hodnoty logaritmických funkcií (urč logaritmus čísla):

a) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64}$

b) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{81}{256}$

c) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{64}{27}$

d) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{256}{81}$

Riešenie: Ukážeme si riešenie a) a d).

a) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64}$ Pýtame sa: „ $\frac{3}{4}$ na koľkú je $\frac{27}{64}$?“

Odpoveď: „ $\frac{3}{4}$ na tretiu je $\frac{27}{64}$.“

Potom $\log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64} = 3$, lebo $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.

d) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{256}{81}$ Pýtame sa: „ $\frac{3}{4}$ na koľkú je $\frac{256}{81}$?“

Odpoveď: „ $\frac{3}{4}$ na -4 je $\frac{256}{81}$.“

Potom $\log_{\frac{3}{4}} \frac{256}{81} = -4$, lebo $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81}$.

Riešenie: b) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{81}{256} = 4$ c) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{64}{27} = -3$

3. Urč logaritmus čísla:

a) $\log_3 9$

b) $\log_5 125$

c) $\log_4 4$

d) $\log_7 1$

e) $\log_{10} \frac{1}{10}$

f) $\log_3 \frac{1}{27}$

g) $\log_5 \frac{1}{25}$

h) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$

i) $\log_{\frac{5}{4}} \frac{25}{16}$

j) $\log_{\frac{3}{8}} 1$

k) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{125}{8}$

*l) $\log_{\frac{9}{25}} \frac{3}{5}$

Riešenie:

a) 2 b) 3 c) 1 d) 0 e) -1 f) -3 g) -2 h) 2

i) 2 j) 0 k) -3 *l) $\frac{1}{2}$

4. Urč hodnotu premennej x:

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_5 x = 1$

c) $\log_4 x = 0$

d) $\log_2 x = 4$

e) $\log_2 x = -3$

f) $\log_3 x = -2$

i) $\log_5 x = -1$

j) $\log_7 x = -2$

k) $\log_{\frac{2}{5}} x = 0$

l) $\log_{\frac{3}{2}} x = 2$

m) $\log_{\frac{1}{4}} x = 3$

n) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1$

o) $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$

p) $\log_{\frac{2}{7}} x = -2$

r) $\log_{\frac{3}{5}} x = -3$

*s) $\log_{\frac{81}{25}} x = \frac{1}{2}$

Riešenie:

Ukážeme si riešenie a), e), k) a o).

$$\text{a) } \log_3 x = 2 \quad \text{Platí : } 3^2 = x \quad \text{Potom: } x = 9$$

$$\text{e) } \log_2 x = -3 \quad \text{Platí : } 2^{-3} = x \quad \text{Potom: } x = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\text{k) } \log_{\frac{2}{5}} x = 0 \quad \text{Platí : } \left(\frac{2}{5}\right)^0 = x \quad \text{Potom: } x = \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

$$\text{o) } \log_{\frac{1}{5}} x = -1 \quad \text{Platí : } \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = x \quad \text{Potom: } x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{1}\right)^1 = 5$$

Riešenia:

$$\begin{array}{llllll} \text{b) } 5 & \text{c) } 1 & \text{d) } 16 & \text{f) } \frac{1}{9} & \text{i) } \frac{1}{5} & \text{j) } \frac{1}{49} \\ \text{l) } \frac{9}{4} & \text{m) } \frac{1}{64} & \text{n) } \frac{1}{3} & \text{p) } \frac{49}{4} & \text{r) } \frac{125}{27} & \text{*s) } \frac{9}{5} \end{array}$$

5. Urč hodnotu premennej a :

$$\text{a) } \log_a 25 = 2 \quad \text{b) } \log_a 64 = 3 \quad \text{c) } \log_a 3 = 1 \quad \text{*d) } \log_a 4 = 0,5$$

$$\text{e) } \log_a 27 = -3 \quad \text{f) } \log_a 16 = -2 \quad \text{i) } \log_a 7 = -1 \quad \text{j) } \log_a \sqrt{3} = 0,5$$

$$\text{k) } \log_a \frac{2}{3} = -1 \quad \text{l) } \log_a \frac{4}{9} = -2 \quad \text{m) } \log_a 0,25 = 1 \quad \text{n) } \log_a \frac{8}{125} = -3$$

Riešenie:

Ukážeme si riešenie a), e), k).

$$\text{a) } \log_a 25 = 2 \quad \text{Platí : } a^2 = 25$$

$$\text{Potom: } a = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{e) } \log_a 27 = -3 \quad \text{Platí : } a^{-3} = 27$$

$$\text{Potom: } a = \frac{1}{3}, \text{ lebo } \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{1}\right)^3 = 27$$

$$\text{k) } \log_a \frac{2}{3} = -1 \quad \text{Platí : } a^{-1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Potom: } a = \frac{3}{2}, \text{ lebo } \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

Riešenia ďalších úloh prediskutuj so svojim učiteľom.

