

Lomené výrazy Násobenie a delenie

Pri násobení a delení lomených výrazov používame vedomosti, ktoré poznáme z krátenia lomených výrazov:

➤ **násobenie mocnín**

násobíme mocniny s rovnakým základom, základ mocniny pri násobení opíšeme a exponenty sčítame, napríklad $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$

➤ **delenie mocnín**

delíme mocniny s rovnakým základom, základ mocniny opíšeme a exponenty odčítame, napríklad $x^5 : x^2 = \frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$

➤ **vynímanie pred zátvorku**

vynímame najväčšieho spoločného deliteľa, napríklad $2x^2 - 4x = 2x \cdot (x - 2)$

➤ **rozklady výrazov podľa vzorcov**

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A + B) \cdot (A + B), \text{ napríklad } x^2 + 6x + 9 = (x + 3) \cdot (x + 3)$$

$$A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A - B) \cdot (A - B), \text{ napríklad } x^2 - 10x + 25 = (x - 5) \cdot (x - 5)$$

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B), \text{ napríklad } x^2 - 16 = (x + 4) \cdot (x - 4)$$

Násobenie lomených výrazov

Lomené výrazy násobíme ako zlomky – **čitateľa čitateľom a menovateľa menovateľom**. Ak je to možné, použijeme **krížové pravidlo**, ktoré nám zjednoduší úpravu lomeného výrazu. Krížové pravidlo používame vtedy, ak majú čitatele a menovatele zlomkov **spoločného deliteľa**.

Zopakujme si najprv násobenie zlomkov, ktoré neobsahujú neznámu (premennú).

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \text{Násobíme čitateľa čitateľom a menovateľa menovateľom: } \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

Čitateľ a menovateľ zlomku $\frac{10}{21}$ nemajú spoločného deliteľa, zlomok je v základnom tvare.

$\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} =$ Čísla 2 a 8 sú deliteľné číslom 2, čísla 3 a 9 sú deliteľné číslom 3 – môžeme

použiť krížové pravidlo.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot \underset{4}{\cancel{8}}} = \text{Potom násobíme čitateľa čitateľom, menovateľa menovateľom} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$$

Čitateľ a menovateľ zlomku nemajú spoločného deliteľa, zlomok $\frac{1}{12}$ je v základnom tvare.

Teraz si ukážeme v dvoch príkladoch násobenie lomených výrazov.

Príklad 1: Vynásobte lomené výrazy:

$$\frac{x^2 y}{y^3} \cdot \frac{2y}{5x}$$

Riešenie:

Vidíme, že mocniny vo výrazoch môžeme krátiť krížovým pravidlom.

Aby sme sa však nepomýlili, radšej násobíme čitateľa čitateľom a menovateľa menovateľom

a až potom mocniny vykrátíme: $\frac{x^2 y}{y^3} \cdot \frac{2y}{5x} = \frac{x^2 y^1 \cdot 2y^1}{y^3 \cdot 5x^1} = \frac{2x^2 y^2}{5x^1 y^3} = \frac{2x^{2-1}}{5y^{3-2}} = \frac{2x}{5y}$

Pri násobení mocnín s rovnakým základom základ opíšeme a exponenty sčítame:
 $x^2 y^1 \cdot 2y^1 = 2x^2 y^2$
 $y^3 \cdot 5x = 5xy^3$

Mocniny x^2 a x krátime delením
 $x^2 : x^1 = x^{2-1} = x^1 = x$.
Mocniny y^2 a y^3 krátime delením
 $y^3 : y^2 = y^{3-2} = y^1 = y$.
Výsledok krátenia mocnín zapisujeme do čitateľa a menovateľa podľa toho, ktorá z mocnín bola delená.

V prípade lomených výrazov nezapudíme **napísať podmienku pre existenciu výrazov:**

➔ menovateľ zlomku sa nesmie rovnať 0, v našom prípade $x \neq 0, y \neq 0$.

Príklad 2: Vynásobte lomené výrazy:

$$\frac{5a^3 b}{4c^2 d^3} \cdot \frac{2ac^2}{5b^4 d}$$

Riešenie:

Aj v tejto úlohe vidíme, že mocniny vo výrazoch môžeme krátiť krížovým pravidlom.

Znovu radšej násobíme čitateľa čitateľom a menovateľa menovateľom a až potom mocniny

$$\text{vykrátíme: } \frac{5a^3b}{4c^2d^3} \cdot \frac{2ac^2}{5b^4d} = \frac{5 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a \cdot b \cdot c^2}{4 \cdot 5 \cdot b^4 \cdot c^2 \cdot d^3 \cdot d} = \frac{10a^4b^1c^2}{20b^4c^2d^4} = \frac{a^4c^{2-2}}{2b^{4-1}d^4} = \frac{a^4c^0}{2b^3d^4} = \frac{a^4}{2b^3d^4}$$

Podmienka pre existenciu výrazov:

➔ menovateľ zlomku sa nesmie rovnať 0: $c \neq 0$, $d \neq 0$, $b \neq 0$.

Iný zápis riešenia úlohy:

$$\frac{5a^3b}{4c^2d^3} \cdot \frac{2ac^2}{5b^4d} = \frac{a^{3+1} \cdot c^{2-2}}{2 \cdot b^{4-1} \cdot d^{3+1}} = \frac{a^4c^0}{2b^3d^4} = \frac{a^4 \cdot 1}{2b^3d^4} = \frac{a^4}{2b^3d^4}$$

Cvičenie 2: Vynásobte a nezabudnite uviesť podmienky pre lomený výraz.

1. $\frac{a^2b}{2ab^3} \cdot \frac{4a}{3b} =$

2. $\frac{3ab^4c}{6ab^3c^3} \cdot \frac{12ac^2}{9abc} =$

3. $-\frac{10r^6p^5}{2r^5p^3} \cdot \frac{4rp}{5r^2p} =$

4. $-\frac{Q^2P^3}{2P^2Q^3} \cdot \frac{PQ}{3P^2} =$

Príklad 3 Vynásobte a nezabudnite uviesť podmienky pre lomený výraz.

$$\frac{(x-1)^2}{x+1} \cdot \frac{2x+2}{3x-3}$$

Riešenie: V tejto úlohe vidíme, že pred násobením lomených výrazov by bolo vhodné v druhom lomenom výraze upraviť dvojčleny vyňatím pred zátvorku.

$$\frac{(x-1)^2}{x+1} \cdot \frac{2x+2}{3x-3} = \frac{(x-1)^2}{x+1} \cdot \frac{2 \cdot (x+1)}{3 \cdot (x-1)} = \frac{(x-1) \cdot \cancel{(x-1)}}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{(x+1)}}{3 \cdot (x-1)} = \frac{2 \cdot (x-1)}{3} = \frac{2x-2}{3}$$

Vyňatie pred zátvorku.

Krátenie rovnakých výrazov.

Podmienka pre existenciu lomených výrazov:

➔ menovateľ zlomku sa nesmie rovnať 0:

$$x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$3x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Cvičenie 3

$$1. \frac{(x-3)^4}{x+3} \cdot \frac{6x+18}{3x-9} =$$

$$2. \frac{(x+2)^3}{4x-8} \cdot \frac{2x-4}{5x+10} =$$

$$3. \frac{x^2}{x+3} \cdot \frac{2x-2}{x^3-x^2} =$$

$$4. \frac{x^2-6x}{x-1} \cdot \frac{ax-a}{x^3} =$$

$$5. \frac{(x-1)^3}{2x-2} \cdot \frac{2x+2}{(x-1)^2} =$$

$$6. \frac{(x+4)^5}{x-4} \cdot \frac{x^2-4x}{(x+4)^4} =$$

Príklad 4 Vynásobte a nezabudnite uviesť podmienky pre lomený výraz.

$$-\frac{49-14x+x^2}{4 \cdot (x-7)^3} \cdot \left(-\frac{8x^3}{x^2-7x}\right) =$$

Riešenie: V tejto úlohe vidíme, že pred násobením lomených výrazov by bolo vhodné upraviť v prvom lomenom výraze čitateľa rozkladom podľa vzorca

$$A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A - B) \cdot (A - B)$$

a v druhom lomenom výraze upraviť menovateľa vyňatím pred zátvorku.

$$-\frac{49-14x+x^2}{4 \cdot (x-7)^3} \cdot \left(-\frac{8x^3}{x^2-7x}\right) = \frac{(7-x)^2}{4 \cdot (x-7)^3} \cdot \frac{8x^3}{x \cdot (x-7)} = \frac{8x^3 \cdot (7-x)^2}{4x \cdot (x-7)^4} = \frac{2x^2 \cdot (x-7)^2}{(x-7)^4} =$$

Násobíme: - · - = +
Slovom: mínus krát mínus je plus.

Platí $(x-7)^2 = (7-x)^2$.

$$= \frac{2x^2 \cdot (x-7)^2}{(x-7)^4} = \frac{2x^2}{(x-7)^2}$$

Podmienka pre existenciu výrazov:

➔ menovateľ zlomku sa nesmie rovnať 0:

$$x-7 \neq 0 \Rightarrow x \neq 7$$

$$x^2 - 7x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; \quad x \neq 7$$

Pri riešení nasledujúcich cvičení najprv rozložte výrazy, či už vynímaním alebo podľa vzorcov uvedených v úvode prezentovaného učiva.

Cvičenie 4

$$1. \frac{x^2 - 4}{x + 2} \cdot \frac{4 + 2x}{x^2 - 2x} =$$

$$2. \frac{x^2 - 16}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x}{x^2 - 4x} =$$

$$3. \frac{ax^2 - a}{x^3} \cdot \frac{1 + x}{x^2 + 2x + 1} =$$

$$4. -\frac{x^2}{3x + 12} \cdot \frac{16 - 8x + x^2}{x^2 - 4x} =$$

$$5. \frac{49 - 14x + x^2}{4 \cdot (x - 7)^3} \cdot \frac{8x^3}{x^2 - 7x} =$$

$$6. \frac{ax + bx}{ax - bx} \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} =$$

Delenie lomených výrazov

Delenie lomených výrazov realizujeme tak, ako delenie zlomkov.

Prvý zlomok násobíme prevrátenou hodnotou druhého zlomku.

Napríklad:

$$\frac{5}{6} : \frac{40}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{40} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{x^2}{y^3 z} : \frac{4x^5}{yz^3} = \frac{x^2}{y^3 z} \cdot \frac{yz^3}{4x^5} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{z^2}{4x^3} = \frac{z^2}{4x^3 y^2} \quad x; y; z \neq 0$$

$$\frac{(x-1)^3}{x^2 + x} : \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x-1)^3}{x^2 + x} \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^3}{x \cdot (x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{(x-1)^2}{x}$$

Podmienky pri delení lomených výrazov určujeme pre menovatele zlomkov **v delení** a potom aj pre menovatele zlomkov **pri násobení**:

$$x^2 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; \quad x \neq -1$$

$$x^2 + 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

Cvičenie 5 Vydeľte a nezabudnite uviesť podmienky pre lomený výraz.

$$1. \frac{(x-1)^2}{x+1} : \frac{2x-2}{3x+3} =$$

$$2. \frac{(x+2)^3}{4x-8} : \frac{2x+4}{5x-10} =$$

$$3. \frac{2x-2}{x^3-x^2} : \frac{x+3}{2x^2} =$$

$$4. \frac{x-1}{x^3} : \frac{6x-6}{x^2-6x} =$$

$$5. \frac{4+2x}{x^2-8x+16} : \frac{x^2-4}{x+2} =$$

$$6. \frac{x^2-4x}{5x} : \frac{x^2-16}{x^2+8x+16} =$$

$$7. \frac{(x-1)^3}{2x-2} : \frac{(x-1)^2}{4x+4} =$$

$$8. \frac{(x-5)^3}{x^2+5x} : \frac{x^2-25}{x^2+10x+25} =$$

Zložené zlomky

Zložené zlomky sú vlastne podielom lomených výrazov a tak ich zjednodušovanie realizujeme tak, ako delenie zlomkov alebo použijeme súčin vonkajších a vnútorných činiteľov.

Napríklad:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{6} : \frac{2}{5} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{12}$$

$$\frac{\frac{x^2}{y^3z}}{\frac{4x^5}{yz^3}} = \frac{x^2}{y^3z} : \frac{4x^5}{yz^3} = \frac{x^2}{y^3z} \cdot \frac{yz^3}{4x^5} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{z^2}{4x^3} = \frac{z^2}{4x^3y^2} \quad x; y; z \neq 0$$

$$\frac{\frac{(x-1)^3}{x^2+x}}{\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}} = \frac{(x-1)^3}{x^2+x} : \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \frac{(x-1)^3}{x^2+x} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^3}{x \cdot (x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{(x-1)^2}{x}$$

Podmienky pri delení lomených výrazov určujeme pre menovatele zlomkov **v delení** a potom aj pre menovatele zlomkov **pri násobení**:

$$x^2 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; \quad x \neq -1$$

$$x^2 + 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

Cvičenie 6 Zjednodušte a nezabudnite uviesť podmienky pre lomený výraz.

$$1. \frac{\frac{(x-1)^3}{x+1}}{\frac{x-1}{x^2+x}} =$$

$$2. \frac{\frac{(x+2)^2}{5x-10}}{\frac{2x+4}{x^2-2x}} =$$

$$3. \frac{\frac{3x-3}{x^3-x^2}}{\frac{x+1}{2x^2}} =$$

$$4. \frac{\frac{x-4}{x^3}}{\frac{6x-24}{x^2-4x}} =$$

$$5. \frac{\frac{4+12x}{x^2-6x+9}}{\frac{x^2-9}{x+3}} =$$

$$6. \frac{\frac{x^2-4x}{x^2}}{\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}} =$$

$$7. \frac{\frac{(x-1)^3}{2x-2}}{\frac{x^2-2x+1}{5x+5}} :=$$

$$8. \frac{\frac{(x-5)^3}{x^2-5x}}{\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}} =$$

Ak chcete skontrolovať svoje riešenia úloh, pošlite ich naskenované alebo ako fotku na mail:

viera.kolbaska@spsehalova.sk