

Lomené výrazy – sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie

Lomené výrazy sme násobili, delili, krátili.

Riešili sme úlohy so zloženými zlomkami.

Teraz si ukážeme ako **sčítovať** a **odčítovať** lomené výrazy.

Je viacero spôsobov ako **súčet** a **rozdiel** zlomkov riešiť, ukážeme si jeden z nich.

Pozrime sa na tento **Príklad 1**:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{9}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9+4}{12} = \frac{13}{12}$$

Najmenší spoločný menovateľ zlomkov je 12.
Preto upravujeme zlomky na menovateľ 12.
V prvom zlomku násobíme čitateľa aj menovateľa 3,
V druhom zlomku násobíme čitateľa aj menovateľa 4.

Sčítame neznáme a konštanty.

$$\frac{x-3}{4} + \frac{1-x}{3} = \frac{(x-3) \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{(1-x) \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3x-9}{12} + \frac{4-4x}{12} = \frac{3x-9+4-4x}{12} = \frac{-x-5}{12}$$

Zátvorky roznásobíme.

Pri odčítaní (rozdiel) lomených výrazov postupujeme tak isto ako pri sčítaní (súčte) lomených výrazov.

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 1}{8 \cdot 1} = \frac{2}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2-3}{8} = -\frac{1}{8}$$

Pred zlomkom je znak „-“, takže roznásobujeme
 $-(3-4x) \cdot 1 = -3+4x$

$$\frac{2x+1}{4} - \frac{3-4x}{8} = \frac{(2x+1) \cdot 2}{4 \cdot 2} - \frac{(3-4x) \cdot 1}{8 \cdot 1} = \frac{4x+2}{8} - \frac{3-4x}{8} = \frac{4x+2-3+4x}{8} = \frac{8x-1}{8}$$

Poznámka:

Zlomky sčítavame a odčítavame pomocou **najmenšieho spoločného menovateľa** zlomkov v úlohe.

Vypočítajte nasledujúce cvičenie.

Cvičenie 1 Vypočítajte:

a) $\frac{2a-3}{4} + \frac{1+4a}{2} =$

b) $\frac{4x-3}{5} + \frac{1-5x}{3} =$

c) $\frac{2a+1}{7} - \frac{4a+3}{14} =$

d) $\frac{3-x}{10} - \frac{x-4}{15} =$

Výsledky:

1. a) $\frac{10a-1}{4}$

b) $\frac{-13x-4}{15} = -\frac{13x+4}{15}$

c) $-\frac{1}{14}$

d) $\frac{-5x+17}{30}$

Poznámka:

Ak vieme správne a rýchlo počítat' úlohy so zlomkami, zápisy riešení môžu byť oveľa kratšie, napríklad:

$$\frac{x-1}{4} + \frac{x-3}{2} - \frac{2x+1}{8} - \frac{4-x}{16} = \frac{\overset{16:4}{4} \cdot (4-x) + \overset{16:2}{8} \cdot (x-3) - \overset{16:8}{2} \cdot (2x+1) - \overset{16:16}{1} \cdot (4-x)}{16} =$$

Roznásobíme zátvorky v čitateli:

$$= \frac{16 - 4x + 8x - 24 - 4x - 2 - 4 + x}{16} = \frac{x-14}{16}$$

Príklad 2 Vypočítajte:

a) $\frac{3y+1}{5y} + \frac{y-2}{3y}$

b) $\frac{2-a}{3a} - \frac{a+5}{6a}$

Riešenie:

a) V nasledujúcom príklade sú v menovateľoch zlomkov neznáme.

Spoločného menovateľa **zjednodušene určíme** tak, že určíme najprv spoločný násobok pre čísla **5 a 3** (číslo 15) a potom pre **y a y** (len y) – takže spoločný menovateľ bude **15y**.

$$\frac{3y+1}{5y} + \frac{y-2}{3y} = \frac{(3y+1) \cdot 3}{5y \cdot 3} + \frac{(y-2) \cdot 5}{3y \cdot 5} = \frac{9y+3+5y-10}{15y} = \frac{14y-7}{15y}$$

V menovateľoch zlomkov je neznáma, preto určujeme **podmienky** pre zlomky:

$$5y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$$

$$3y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$$

Pri roznásobovaní zátvoriek si treba dať pozor na zmenu znamienok.

b) $\frac{2-a}{3a} - \frac{a+5}{6a} = \frac{(2-a) \cdot 2}{3a \cdot 2} - \frac{(a+5) \cdot 1}{6a \cdot 1} = \frac{4-2a-a-5}{6a} = \frac{-3a-1}{6a} = -\frac{3a+1}{6a}$

Podmienky pre zlomky:

$$3a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

$$6a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

Poznámka: stačí písať $a \neq 0$.

Cvičenie 2. Vypočítajte:

a) $\frac{2x-1}{5x} + \frac{x+2}{10x} =$

b) $\frac{b-2}{3b} + \frac{3b+1}{8b} =$

c) $\frac{3b+5}{b} - \frac{b-1}{5b} =$

d) $\frac{y-4}{2y} - \frac{2-y}{10y} =$

Výsledky:

a) $\frac{1}{2}; x \neq 0$ b) $\frac{17b-13}{24b}; b \neq 0$ c) $\frac{14b+26}{5b}; b \neq 0$ d) $\frac{6y-22}{10y} = \frac{3y-11}{5y}; y \neq 0$

Príklad 3 Vypočítajte:

a) $\frac{x-2}{4x^2} + \frac{x+2}{x^3} =$

b) $\frac{a+2}{3a} - \frac{1-a}{5a^2} =$

Riešenie:

a) V tomto príklade sú taktiež v menovateľoch zlomkov neznáme.

Spoločného menovateľa **určíme zjednodušene** tak, že určíme najprv spoločný násobok pre

číslo **4 a 1** (číslo 4) a potom pre x^2 a x^3 (mocnina x^3) – takže to bude $4x^3$.

$$\frac{x-2}{4x^2} + \frac{x+2}{x^3} = \frac{(x-2) \cdot x}{4x^2 \cdot x} + \frac{(x+2) \cdot 4}{x^3 \cdot 4} = \frac{x^2 - 2x + 4x + 8}{4x^3} = \frac{x^2 + 2x + 8}{4x^3}$$

$\boxed{4x^3}$ $\boxed{4x^3}$

Podmienky pre zlomky:

$$4x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$x^3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

Poznámka: stačí písať $x \neq 0$.

b) $\frac{a+2}{3a} - \frac{1-a}{5a^2} = \frac{(a+2) \cdot 5a}{3a \cdot 5a} - \frac{(1-a) \cdot 3}{5a^2 \cdot 3} = \frac{5a^2 + 10a - 3 + 3a}{15a^2} = \frac{5a^2 + 13a - 3}{15a^2}$

$\boxed{15a^2}$ $\boxed{15a^2}$

Podmienky pre zlomky:

$$3a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

$$5a^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

Poznámka: stačí písať $a \neq 0$.

Cvičenie 3 Vypočítajte:

$$\text{a) } \frac{y-4}{y^2} + \frac{y+2}{y} =$$

$$\text{b) } \frac{a+6}{a} + \frac{2-a}{a^2} =$$

$$\text{c) } \frac{3x+2}{2x} - \frac{x-1}{5x^2} =$$

$$\text{d) } \frac{b-4}{3b^2} - \frac{2-3b}{b^4} =$$

Výsledky:

$$\text{a) } \frac{y^2 + 3y - 4}{y^2}; \quad y \neq 0$$

$$\text{b) } \frac{a^2 + 5a + 2}{a^2}; \quad a \neq 0$$

$$\text{c) } \frac{15x^2 + 8x + 2}{10x^2}; \quad x \neq 0$$

$$\text{d) } \frac{b^3 - 4b^2 + 9b - 6}{3b^4}; \quad b \neq 0$$

Príklad 4 Vypočítajte:

$$\text{a) } \left(\frac{x}{2} - 1\right) \cdot \left(2 + \frac{x}{4}\right) =$$

$$\text{b) } \left(\frac{y+1}{y} - y\right) : \left(1 + \frac{2}{y^2}\right) =$$

$$\text{c) } \frac{\frac{z}{2} + \frac{z}{3}}{1 - \frac{3z}{4}} =$$

Riešenie:

Úlohy môžeme riešiť rôznymi spôsobmi. My si ukážeme jeden z nich. Vaše spôsoby riešenia závisia od predchádzajúcich vedomostí o zlomkoch.

$$\text{a) } \left(\frac{x}{2} - 1\right) \cdot \left(2 + \frac{x}{4}\right) =$$

V zátvorkách máme rozdiel a súčet. Vypočítame ich.

$$= \left(\frac{x}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{1} + \frac{x}{4}\right) = \left(\frac{x-2}{2}\right) \cdot \left(\frac{8+x}{4}\right) =$$

Vynásobíme čitatele a menovatele.

$$= \left(\frac{x-2}{2}\right) \cdot \left(\frac{8+x}{4}\right) = \frac{(x-2) \cdot (8+x)}{2 \cdot 4} = \frac{8x - 16 + x^2 - 2x}{8} = \frac{x^2 + 6x - 16}{8}$$

Výsledok:

$$= \frac{x^2 + 6x - 16}{8}$$

$$\text{b) } \left(\frac{y+1}{y} - y\right) : \left(1 + \frac{2}{y^2}\right) =$$

Aj tu sú v zátvorkách rozdiel a súčet. Vypočítame ich.

$$= \left(\frac{y+1}{y} - \frac{y}{1} \right) : \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{y^2} \right) = \left(\frac{y+1-y^2}{y} \right) : \left(\frac{y^2+2}{y^2} \right) = \left(\frac{1+y-y^2}{y} \right) : \left(\frac{y^2+2}{y^2} \right) =$$

Získali sme podiel zlomkov, a tak prvý zlomok opíšeme a vynásobíme ho prevráteným druhým zlomkom.

$$= \left(\frac{1+y-y^2}{y} \right) \cdot \left(\frac{y^2}{y^2+2} \right) =$$

Môžeme použiť krížové pravidlo a vykrátiť y a y^2 .

$$= \left(\frac{1+y-y^2}{1} \right) \cdot \left(\frac{y}{y^2+2} \right) = \frac{(1+y-y^2) \cdot y}{y^2+2} =$$

Výsledok:

$$= \frac{y+y^2-y^3}{y^2+2}$$

Podmienky pre zlomky:

$$y \neq 0 \quad y^2 \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \quad y^2 + 2 \neq 0$$

$$\text{c) } \frac{\frac{z}{2} + \frac{z}{3}}{1 - \frac{3z}{4}} =$$

V čitateli je súčet, v menovateli je rozdiel. Najprv vypočítame oba.

$$= \frac{\frac{3z+2z}{6}}{\frac{4-3z}{4}} =$$

Zložený zlomok vypočítame pomocou podielu čitateľa a menovateľa.

$$= \frac{3z+2z}{6} : \frac{4-3z}{4} = \frac{5z}{6} : \frac{4-3z}{4}$$

Delenie zrealizujeme „klasicky“.

$$= \frac{5z}{6} \cdot \frac{4}{4-3z} =$$

Použijeme krížové pravidlo pre 4 a 6.

$$= \frac{5z}{3} \cdot \frac{2}{4-3z} =$$

Teraz vynásobíme čitateľa čitateľom a menovateľa menovateľom. Výsledok:

$$= \frac{10z}{12-9z}$$

Podmienka pre zložený zlomok je: $1 - \frac{3z}{4} \neq 0 \Rightarrow 4 - 3z \neq 0 \Rightarrow z \neq \frac{4}{3}$.

Cvičenie 4 Vypočítajte:

a) $\left(\frac{a}{5} - a\right) \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right) =$

b) $\left(\frac{b-4}{2b} + 1\right) : \left(1 + \frac{b+2}{b^2}\right) =$

c) $\frac{\frac{c}{4} + \frac{c}{12}}{1 - \left(c + \frac{c}{3}\right)} =$

Výsledky Cvičenia 4 vám skontrolujem, ak mi ich pošlete na adresu

viera.kolbaska@spsehalova.sk.

Výsledky Cvičenia 4

a) $-\frac{6a^2}{5}$

b) $\frac{3b^2 - 4b}{2b^2 + 2b + 4} \quad b \neq 0; \quad b^2 + b + 2 \neq 0$

c) $\frac{c}{3 - 4c} \quad c \neq \frac{3}{4}$