

## Mocniny s racionálnym mocniteľom - riešené úlohy

Pri riešení úloh budeme používať nasledujúcu definíciu (vzorec):

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}$$

**Úloha 1.** Zapište uvedené mocniny pomocou odmocniny:

$$a^{\frac{1}{5}} \quad a^{\frac{1}{6}} \quad a^{\frac{2}{3}} \quad a^{\frac{4}{7}} \quad a^{\frac{1}{5}} \quad a^{\frac{2}{4}} \quad a^{0,3} \quad a^{1,2}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{5}} &= \sqrt[5]{a^1} = \sqrt[5]{a} & a^{\frac{1}{6}} &= \sqrt[6]{a^1} = \sqrt[6]{a} \\ a^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{a^2} & a^{\frac{4}{7}} &= \sqrt[7]{a^4} \\ a^{\frac{1}{5}} &= a^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{a^6} & a^{2\frac{1}{4}} &= a^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{a^9} \\ a^{0,3} &= a^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{a^3} & a^{1,2} &= a^{\frac{12}{10}} = a^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{a^6} \end{aligned}$$

**Úloha 2.** Zapište uvedené mocniny pomocou odmocniny:

$$x^{-\frac{1}{5}} \quad x^{-\frac{5}{6}} \quad x^{-1\frac{2}{3}} \quad x^{-0,6}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} x^{-\frac{1}{5}} &= \sqrt[5]{x^{-1}} & x^{-\frac{5}{6}} &= \sqrt[6]{x^{-5}} \\ x^{-1\frac{2}{3}} &= x^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^{-5}} & x^{-0,6} &= x^{-\frac{6}{10}} = x^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^{-3}} \end{aligned}$$

*Poznámka: v prípade, že chceme vyjadrenie mocninami s kladným mocniteľom, riešenia budú tieto:*

$$\begin{aligned} x^{-\frac{1}{5}} &= \sqrt[5]{x^{-1}} = \sqrt[5]{\frac{1}{x}} & x^{-\frac{5}{6}} &= \sqrt[6]{x^{-5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{x^5}} \\ x^{-1\frac{2}{3}} &= x^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^{-5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x^5}} & x^{-0,6} &= x^{-\frac{6}{10}} = x^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{x^3}} \end{aligned}$$

**Úloha 3.** Vyjadrite mocninou dané odmocniny:

$$\sqrt[4]{a} \quad \sqrt[5]{a^2} \quad \sqrt[12]{a^5} \quad \sqrt[7]{a^8} \quad \sqrt[3]{a^{-1}} \quad \sqrt[6]{a^{-4}} \quad \sqrt[10]{a^{-5}} \quad \sqrt{a^{-3}}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{a} &= \sqrt[4]{a^1} = a^{\frac{1}{4}} & \sqrt[5]{a^2} &= a^{\frac{2}{5}} & \sqrt[12]{a^5} &= a^{\frac{5}{12}} & \sqrt[7]{a^8} &= a^{\frac{8}{7}} \\ \sqrt[3]{a^{-1}} &= a^{-\frac{1}{3}} & \sqrt[6]{a^{-4}} &= a^{-\frac{4}{6}} = a^{-\frac{2}{3}} & \sqrt[10]{a^{-5}} &= a^{-\frac{5}{10}} = a^{-\frac{1}{2}} & \sqrt{a^{-3}} &= a^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

*Poznámka: v prípade, že chceme mocniny s kladným mocniteľom, budú riešenia nasledujúce:*

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^{-1}} &= a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} & \sqrt[6]{a^{-4}} &= a^{-\frac{4}{6}} = a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

$$\sqrt[10]{a^{-5}} = a^{\frac{-5}{10}} = a^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \quad \sqrt{a^{-3}} = a^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$$

**Úloha 4.** Vypočítajte a vyjadrite mocninou s kladným mocniteľom.

a)  $a^{\frac{-3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$       b)  $x^{\frac{5}{3}} \cdot x^{\frac{-3}{4}}$       c)  $b^{\frac{3}{5}} \cdot b^{\frac{2}{7}}$       d)  $y^{\frac{12}{7}} \cdot y^{0,3}$

*Riešenie: použijeme pravidlo pre počítanie súčinu mocnín s rovnakým základom – základ opíšeme a exponenty sčítame  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ .*

a)  $a^{\frac{-3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{-3}{2} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{-6+1}{4}} = a^{\frac{-5}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{4}}}$

b)  $x^{\frac{5}{3}} \cdot x^{\frac{-3}{4}} = x^{\frac{5}{3} + \left(\frac{-3}{4}\right)} = x^{\frac{5}{3} - \frac{3}{4}} = x^{\frac{20-9}{12}} = x^{\frac{11}{12}}$

c)  $b^{\frac{3}{5}} \cdot b^{\frac{2}{7}} = b^{\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{7}\right)} = b^{\frac{3}{5} + \frac{2}{7}} = b^{\frac{-21+10}{35}} = b^{\frac{-11}{35}} = \frac{1}{b^{\frac{11}{35}}}$

d)  $y^{\frac{12}{7}} \cdot y^{0,3} = y^{\frac{12}{7} + \frac{3}{10}} = y^{\frac{90+21}{70}} = y^{\frac{111}{70}}$

**Úloha 5.** Vypočítajte a vyjadrite mocninou s kladným mocniteľom.

a)  $a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{5}{4}}$       b)  $b^{\frac{5}{6}} : b^{\frac{3}{2}}$       c)  $\frac{c^{0,6}}{c^{\frac{2}{7}}}$       d)  $\frac{d^{-\frac{12}{3}}}{d^{0,9}}$

*Riešenie: použijeme pravidlo pre počítanie podielu mocnín s rovnakým základom – základ opíšeme a exponenty odčítame  $a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ .*

a)  $a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{3}{2} - \frac{5}{4}} = a^{\frac{6-5}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$

b)  $b^{\frac{5}{6}} : b^{\frac{3}{2}} = b^{\frac{5}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)} = b^{\frac{5}{6} - \frac{3}{2}} = b^{\frac{5-9}{6}} = b^{\frac{-4}{6}} = b^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}}$

c)  $\frac{c^{0,6}}{c^{\frac{2}{7}}} = c^{0,6 - \left(\frac{2}{7}\right)} = c^{\frac{6}{10} - \frac{2}{7}} = c^{\frac{42-20}{70}} = c^{\frac{22}{70}} = c^{\frac{11}{35}}$

d)  $\frac{d^{-\frac{12}{3}}}{d^{0,9}} = d^{-\frac{12}{3} - 0,9} = d^{-\frac{5}{3} - \frac{9}{10}} = d^{\frac{-50-27}{30}} = d^{\frac{-77}{30}} = \frac{1}{d^{\frac{77}{30}}}$

*Poznámka: zlomky vyjadrujeme vždy v základnom tvare.*

**Úloha 6.** Vypočítajte a vyjadrite mocninou s kladným mocniteľom.

a)  $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{-2}$       b)  $\left(b^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{4}{5}}$       c)  $\left(c^{0,6}\right)^{-0,3}$       d)  $\left(d^{-\frac{12}{3}}\right)^{-0,1}$

Riešenie: použijeme pravidlo pre umocňovane mocnín – základ opišeme a exponenty

vy násobíme  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ .

$$a) \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{-2} = a^{\frac{3}{2} \cdot (-2)} = a^{\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{1}\right)} = a^{\frac{-3}{1}} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

$$b) \left(b^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{4}{5}} = b^{-\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 5}} = b^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}}$$

$$c) \left(c^{0,6}\right)^{-0,3} = c^{0,6 \cdot (-0,3)} = c^{-0,18} = c^{\frac{-18}{100}} = c^{\frac{-9}{50}} = \frac{1}{c^{\frac{9}{50}}}$$

$$d) \left(d^{-1\frac{2}{3}}\right)^{-0,1} = d^{-1\frac{2}{3} \cdot (-0,1)} = d^{\frac{-5 \cdot -1}{3 \cdot 10}} = d^{\frac{1}{6}}$$

**Úloha 7.** Vypočítajte a vyjadrite mocninou s kladným mociteľom.

$$a) \left(a^{-0,3} \cdot b\right) \cdot (2ab)^3 \qquad b) \left(a^{-0,1} b^3\right)^2 : ab^{-2}$$

$$c) \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-0,2}\right)^{-1} \qquad d) \left(\frac{ac \cdot b^{-\frac{5}{3}}}{a^{0,1} \cdot bc}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Riešenie:

$$a) \left(a^{-0,3} \cdot b\right) \cdot (2ab)^3 = \left(a^{-0,3} \cdot b\right) \cdot \left(2^3 a^3 b^3\right) = 2^3 a^{-0,3+3} b^{1+3} = 2^3 a^{2,7} b^4$$

$$b) \left(a^{-0,1} b^3\right)^2 : ab^{-2} = \left(a^{-0,2} b^6\right) : a^1 b^{-2} = a^{-0,2-1} b^{6-(-2)} = a^{-1,2} b^8 = \frac{b^8}{a^{1,2}} = \frac{b^8}{a^{\frac{6}{5}}}$$

$$c) \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-0,2}\right)^{-1} = a^{\frac{1}{2} \cdot (-1)} \cdot b^{-0,2 \cdot (-1)} = a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{0,2} = \frac{b^{0,2}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{2}}}$$

$$d) \left(\frac{ac \cdot b^{-\frac{5}{3}}}{a^{0,1} \cdot bc}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(a^{1-0,1} c^{1-1} \cdot b^{-\frac{5}{3}-1}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(a^{0,9} c^0 \cdot b^{-\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = a^{0,9 \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)} \cdot b^{-\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)} =$$

$$= a^{\frac{9}{10} \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)} \cdot b^{\frac{8}{15}} = a^{-\frac{9}{50}} \cdot b^{\frac{8}{15}} = \frac{b^{\frac{8}{15}}}{a^{\frac{9}{50}}}$$

Poznámka:  $c^0 = 1$

**Úloha 8.** Vypočítajte:

$$16^{\frac{1}{2}} \quad 0,008^{\frac{1}{3}} \quad \left(\frac{32}{81}\right)^{\frac{1}{5}} \quad \left(\frac{4}{81}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(-\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

*Riešenie:*

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$0,008^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0,008} = 0,2$$

$$\left(\frac{32}{81}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{32}{81}} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{4}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}$$

$$\left(-\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{625}}} = \frac{1}{-\frac{1}{5}} = -5$$