

Odchýlka priamok - uhol vektorov

Kolmost' priamok - vektorov

Odchýlka priamok
Kolmost' priamok
(v rovine)

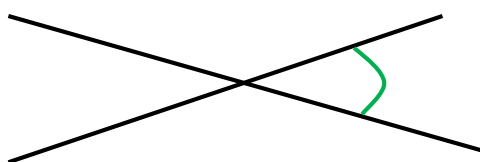
V analytickej geometrii sme hovorili o vzájomnej polohe priamok a vtedy sme si povedali, že vzájomnú polohu priamok môžeme určovať nielen pomocou spoločných bodov ale aj pomocou **uhla**, ktorý priamky zvierajú.

Vieme, že ak sú priamky na seba kolmé, zvierajú pravý uhol – uhol o veľkosti 90° .

Ak sú rôznobežné, tak zvierajú ostrý uhol – uhol väčší ako 0° a menší ako 90° .

Ak sú rovnobežné rôzne ukážeme si na príklade.

Ak sú totožné ukážeme si na príklade.



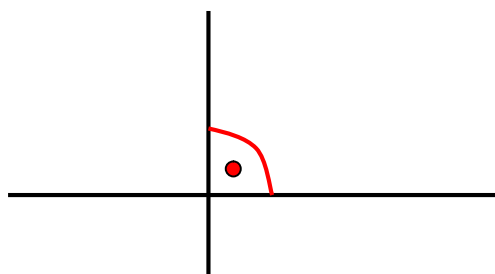
rôznobežné priamky ... **ostrý uhol**



rovnobežné rôzne priamky ... ?



totožné priamky ... ?



priamky na seba kolmé ... **uhol 90°**

Čo potrebujeme vedieť?

- Rovnice priamok (všeobecná, smernicová, parametrické)
- Vektory, ktoré určujú priamky (smerové, normálové)
- Vzorec na výpočet uhla vektorov

Rovnice priamok	Rovnica	Vektory
všeobecná	$ax + by + c = 0$	normálový $\vec{n}(a; b)$ smerový vektor $\vec{u}(-b; a)$
smernicová	$y = kx + q$	normálový $\vec{n}(k; -1)$
parametrické	$x = x_A + t \cdot u_1$ $y = y_A + t \cdot u_2$	smerový $\vec{u}(u_1; u_2)$ normálový $\vec{n}(-u_2; u_1)$

Vzťah medzi normálovým a smerovým vektorom:

Ich skalárny súčin je 0.

Vzorec pre veľkosť uhla φ dvoch vektorov $\vec{u}(u_1, u_2)$ a $\vec{v}(v_1, v_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Pre výpočet odchýlky (veľkosti uhla) dvoch priamok, vždy vyberáme dvojicu rovnakých (druhovo) vektorov.

Pri odchýlke priamok, keďže uhol je z 1. kvadrantu, dávame čitateľa do absolútnej

hodnoty:

$$\cos \varphi = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

PRÍKLAD 1 Vypočítajte odchýlku priamok $p : 2x + y - 1 = 0$ a $q : -x - 3y + 5 = 0$.

RIEŠENIE:

Potrebné výpočty:

1. Určenie druhu rovníc
2. Určenie vektorov z rovníc
3. Použitie vzorca na výpočet uhla dvoch vektorov

Ad 1 Určenie druhu rovníc

Obe priamky sú typu $ax + by + c = 0$ tzn. sú dané všeobecnou rovnicou.

Ad 2 Určenie vektorov

Určíme normálové vektory $\vec{n}(a; b)$.

$$\begin{array}{l} p: 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x + 1 \cdot y - 1 = 0 \dots \vec{n}_p(2, 1) \\ q: -x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow -1 \cdot x - 3 \cdot y + 5 = 0 \dots \vec{n}_q(-1, -3) \end{array}$$

Ad 3 Použitie vzorca na výpočet uhla dvoch vektorov upraveného na odchýlku priamok

$$\cos \varphi = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\text{Nech } \vec{n}_p(2, 1) = \vec{u}(2, 1)$$

$$\text{a } \vec{n}_q(-1, -3) = \vec{v}(-1, -3).$$

Potom:

$$\cos \varphi = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}}$$

Potom:

$$\cos \varphi = \frac{|-5|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,7071$$

$$\varphi = \cos^{-1} 0,7071 = 45^\circ$$

Veľkosť uhla medzi vektormi je 45° . **TEDA ODCHÝLKA PRIAMOK JE 45° .**

PRÍKLAD 2 Zistite, či sú priamky $p: x + 3y - 1 = 0$ a $q: y = 3x - 5$ na seba kolmé.

RIEŠENIE:

Ak máme zistiť, či sú priamky na seba kolmé, môžeme použiť dva postupy:

1. Určiť uhol vektorov týchto priamok (či je 90°).
2. Určiť skalárny súčin vektorov (ak je 0, sú na seba kolmé).

Podľa mňa je najlepšie určiť skalárny súčin vektorov, tzn. $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$, kde $\vec{u}(u_1, u_2)$, $\vec{v}(v_1, v_2)$ sú alebo **normálové**, alebo **smernové vektory** priamok.

Potrebné výpočty:

1. Určiť druh rovnice priamky
2. Určiť vektory priamok
3. Určiť skalárny súčin priamok

Ad 1. Určiť druh rovnice priamky

Priamka $p : x + 3y - 1 = 0$ je daná všeobecnou rovnicou $ax + by + c = 0$.

Priamka $q : y = 3x - 5$ je daná smernicovou rovnicou $y = kx + q$.

Ad 2. Určiť vektory priamok

Normálový vektor priamky $p : x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow 1 \cdot x + 3 \cdot y - 1 = 0 \dots \vec{n}_p(1, 3)$

Normálový vektor priamky $q : y = 3x - 5 \Rightarrow 3 \cdot x - 1 \cdot y - 5 = 0 \dots \vec{n}_q(3, -1)$

3. Určiť skalárny súčin priamok

$$\vec{n}_p(1, 3) = \vec{u}(1, 3)$$

$$\vec{n}_q(3, -1) = \vec{v}(3, -1)$$

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0$$

Normálový vektor priamky danej smernicovou rovnicou je $\vec{n}(k, -1)$.

V mnohých príkladoch sa však oplatí smernicovú rovnicu upraviť na všeobecnú rovnicu a z nej určiť potrebný vektor.

AK JE SKALÁRNY SÚČIN VEKTOROV ROVNÝ 0, TAK SÚ VEKTORY NA SEBA KOLMÉ,

TAKŽE AJ PRIAMKY SÚ NA SEBA KOLMÉ.

PRÍKLAD 3 Zistite, či sú priamky $p : y = \frac{3}{5}x - 1$ a $q : x = 1 - 7t; y = -2 + 3t$

rovnobežné rôzne.

RIEŠENIE:

Ak máme zistiť, či sú priamky rovnobežné rôzne pomocou odchýlky priamok, použijeme nasledujúce výpočty.

Potrebné výpočty:

1. Určenie druhu rovníc
2. Určenie vektorov z rovníc
3. Použitie vzorca na výpočet uhla dvoch vektorov

Ad 1 Určenie druhu rovníc

Priamka $p : y = \frac{3}{5}x - 1$ je daná smernicovou rovnicou $y = kx + q$.

Priamka $q : \begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ je daná parametrickými rovnicami $\begin{cases} x = x_A + t \cdot u_1 \\ y = y_A + t \cdot u_2 \end{cases}$.

Ad 2 Určenie vektorov

Určíme normálové vektory $\vec{n}(a;b)$.

Smernicovú rovnicu priamky p upravíme na všeobecnú rovnicu (nebudeme musieť pracovať so zlomkom).

$$\begin{array}{lcl} p : & & \\ y = \frac{3}{5}x - 1 & \cdot 5 & \\ 5y = 3x - 5 & / -3x + 5 & \\ -3x + 5y + 5 = 0 & & \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} y = \frac{3}{5}x - 1 \\ 5y = 3x - 5 \\ -3x + 5y + 5 = 0 \end{array}} \right\} \dots \vec{n}_p(-3;5)$$

Z parametrických rovníc priamky q odčítame smerový vektor a z neho odvodíme normálový vektor.

$$\left. \begin{array}{l} q: x = 1 - 7 \cdot t \\ y = -2 + 3 \cdot t \end{array} \right\} \dots \vec{u}(-7; 3) \dots \vec{n}_q(-3; -7)$$

Vzt'ah medzi normálovým
a smerovým vektorom:

Ich skalárny súčin je 0.

Ad 3 Použitie vzorca na výpočet uhla dvoch vektorov upravený pre priamky

$$\cos \varphi = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\text{Nech } \vec{n}_p(-3, 5) = \vec{u}(-3, 5)$$

$$\text{a } \vec{n}_q(-3; -7) = \vec{v}(-3, -7).$$

Potom:

$$\cos \varphi = \frac{|-3 \cdot (-3) + 5 \cdot (-7)|}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2}}$$

Potom:

$$\cos \varphi = \frac{|-26|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{58}} = \frac{26}{\sqrt{1972}} \doteq 0,5855$$

$$\varphi = \cos^{-1} 0,5855 \doteq 54,16^\circ \doteq 54^\circ 10'$$

VEĽKOSŤ UHLA MEDZI VEKTORMI JE PŘIBLIŽNE $54^\circ 10'$, ČO JE OSTRÝ UHOL A PRIAMKY SÚ TEDA RÔZNOBEŽNÉ, NIE SÚ ROVNOBEŽNÉ RÔZNE.

PRÍKLAD 4 Zistite, či sú priamky $p: y = x - 1$ a $q: x = 2 + t; y = 1 + t$ totožné.

RIEŠENIE:

A. Ukážeme si najprv riešenie podľa počtu spoločných bodov.

Jedna z priamok je daná smernicovou rovnicou, druhá parametrickými rovnicami.

Väčšina zo študentov si oba druhy rovníc upraví na všeobecné rovnice a potom rieši sústavu rovníc. Urobíme to tiež tak.

$$p: y = x - 1 \quad / -x + 1$$

$$-x + y + 1 = 0$$

$$q: x = 2 + t$$

$$y = 1 + t \quad / \cdot (-1) \quad \text{Používame sčítaciu metódu.}$$

$$x = 2 + t$$

$$-y = -1 - t$$

$$x - y = 2 - 1$$

$$x - y - 1 = 0$$

Teraz vytvoríme zo všeobecných rovníc sústavu a vyriešime ju sčítacou metódou.

$$p: \quad -x + y + 1 = 0$$

$$q: \quad \underline{x - y - 1 = 0}$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$0 = 0$$

Výšla nám pravdivá rovnosť, sústava má nekonečne veľa riešení, tzn. priamky majú nekonečný počet spoločných bodov, sú totožné.

B. Ak máme zistiť, či sú priamky totožné **pomocou odchýlky priamok**, použijeme nasledujúce výpočty:

1. Určenie druhu rovníc
2. Určenie vektorov z rovníc
3. Použitie vzorca na výpočet uhla dvoch vektorov

Ad 1 Určenie druhu rovníc

Priamka $p: y = x - 1$ je daná smernicovou rovnicou $y = kx + q$.

Priamka $q: x = 2 + t; y = 1 + t$ je daná parametrickými rovnicami

$$\begin{aligned} x &= x_A + t \cdot u_1 \\ y &= y_A + t \cdot u_2 \end{aligned}$$

Ad 2 Určenie vektorov

Určíme normálové vektory.

$$p: y = x - 1 = 1 \cdot x - 1 \quad \dots \quad \vec{n}_p = (1; -1)$$

Z parametrických rovníc priamky q odčítame smerový vektor

a z neho odvodíme normálový vektor.

$$\left. \begin{array}{l} q: x = 2 + t = 2 + 1 \cdot t \\ y = 1 + t = 1 + 1 \cdot t \end{array} \right\} \quad \dots \quad \vec{u}(1; 1) \quad \dots \quad \vec{n}_q(-1; 1)$$

**Vzťah medzi normálovým
a smerovým vektorom:**

Ich skalárny súčin je 0.

Ad 3 Použitie vzorca na výpočet uhla dvoch vektorov upravený pre priamky

$$\cos \varphi = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\text{Nech } \vec{n}_p = (1; -1) = \vec{u}(1, -1)$$

$$\text{a } \vec{n}_q(-1; 1) = \vec{v}(-1, 1).$$

Potom:

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2}}$$

Potom:

$$\cos \varphi = \frac{|-2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$$

$$\varphi = \cos^{-1} 1 = 0^\circ$$

VEĽKOSŤ UHLA MEDZI VEKTORMI JE 0° .

PRETO, AK SÚ PRIAMKY TOTOŽNÉ, ICH ODCHÝLKA MUSÍ BYŤ 0° .

NA PRECVIČENIE UČIVA RIEŠTE ÚLOHY ZO ZBIERKY 2:

UHOL VEKTOROV OD STR. 118

ODCHÝLKU PRIAMOK OD STR. 143

ZISTÍTE VTEDY, AKÝ UHOL ZVIERAJÚ ROVNOBEŽNÉ RÔZNE PRIAMKY.

