

Racionálna funkcia - funkcia lineárna lomená

Racionálna funkcia je „*akoby rozšírením funkcie nepriamej úmernosti*“.

Je to napríklad funkcia daná rovnicou $y = \frac{x+1}{x-2}$.

V jej rovnici sa nachádza **lomený výraz**, ktorý má v čitateli a v menovateli mnohočlen.

O lomných výrazoch sme sa učili v **1. ročníku**.

Určovali sme:

➤ podmienku existencie výrazu → menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule

➤ **súčet**

➤ **rozdiel**

základom bolo určiť
najmenšieho spoločného menovateľa

➤ **súčin**

➤ **podiel**

základom bolo určiť
najväčšieho spoločného deliteľa a krátiť výrazy

Upravovali sme výrazy:

➤ **rozširovaním**

➤ **krátením**

Z učiva o lomených výrazoch využijeme hlavne podmienku existencie výrazu, súčet a rozdiel výrazu.

Podmienku existencie výrazu (kedy má výraz zmysel) sme riešili v úlohách **o definičnom obore funkcie**, ktorej graf sme nevedeli nakresliť.

Príklad 1

Určte definičné obory funkcií:

$$f_1 : y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$f_2 : y = \frac{x+1}{2x+3}$$

$$f_3 : y = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f_4 : y = \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$f_5 : y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$f_6 : y = \frac{x+1}{x^2-10x+25}$$

Riešenie:

$$f_1 : y = \frac{x+1}{x-2}$$

- Určíme podmienku pre menovateľa zlomku: $\begin{matrix} x-2 \neq 0 \\ x \neq 2 \end{matrix}$ → **riešime ako rovnicu**

- Definičný obor funkcie môžeme zapísať dvomi spôsobmi: $\begin{matrix} D(f_1) = R - \{2\} \\ D(f_1) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty) \end{matrix}$

- **Hovoríme, že do definičného oboru funkcie nepatrí 2.**

$$f_2 : y = \frac{x+1}{2x+3}$$

- Určíme podmienku pre menovateľa zlomku: $\begin{matrix} 2x+3 \neq 0 \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{matrix}$ → **riešime ako rovnicu**

- Definičný obor funkcie: $\begin{matrix} D(f_2) = R - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \\ D(f_2) = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \infty\right) \end{matrix}$

- **Hovoríme, že do definičného oboru funkcie nepatrí $-\frac{3}{2}$.**

$$f_3 : y = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

- Určíme podmienku pre menovateľa zlomku: $\begin{matrix} x^2-2x \neq 0 \\ x \cdot (x-2) \neq 0 \\ x \neq 0 \quad x \neq 2 \end{matrix}$ ← **vynímanie pred zátvorku**

- Definičný obor funkcie: $\begin{matrix} D(f_3) = R - \{0; 2\} \\ D(f_3) = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty) \end{matrix}$

- **Hovoríme, že do definičného oboru funkcie nepatria 0; 2.**

$$f_4 : y = \frac{x+1}{x^2-9}$$

- Určíme podmienku pre menovateľa zlomku:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &\neq 0 \\ x^2 &\neq 9 \\ x &\neq -3 \quad x \neq 3 \end{aligned}$$

- Definičný obor funkcie:

$$\begin{aligned} D(f_4) &= R - \{\pm 3\} \\ D(f_4) &= (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty) \end{aligned}$$

- **Hovoríme, že do definičného oboru funkcie nepatria -3 ; 3 .**

$$f_5 : y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

- Určíme podmienku pre menovateľa zlomku:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\neq 0 \\ x^2 + 1 &> 0 \end{aligned}$$

Tento menovateľ bude vždy kladné číslo.

- Definičný obor funkcie:

$$\begin{aligned} D(f_5) &= R \\ D(f_5) &= (-\infty; \infty) \end{aligned}$$

- **Hovoríme, že definičný obor funkcie tvoria všetky reálne čísla.**

$$f_6 : y = \frac{x+1}{x^2-10x+25}$$

- Určíme podmienku pre menovateľa zlomku:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &\neq 0 \\ (x-5)^2 &\neq 0 \\ x &\neq 5 \end{aligned}$$

Pri úprave sme použili vzorec

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

- Definičný obor funkcie:

$$\begin{aligned} D(f_6) &= R - \{5\} \\ D(f_6) &= (-\infty; 5) \cup (5; \infty) \end{aligned}$$

- **Hovoríme, že do definičného oboru funkcie nepatrí 5 .**

Poznámka: pri riešení úloh na definičný obor funkcií potrebujeme vedomosti o mocninách, lineárnych rovniciach ($f_1 - f_2$) kvadratických rovniciach ($f_3 - f_6$). Precvičte si ich riešenie.

Cvičenie 1

Určte definičné obory funkcií:

$$f_1 : y = \frac{x}{x+3}$$

$$f_2 : y = \frac{x-2}{5x-6}$$

$$f_3 : y = \frac{2x}{x^2+6x}$$

$$f_4 : y = \frac{1-x}{x^2-25}$$

$$f_5 : y = \frac{x+3}{x^2+9}$$

$$f_6 : y = \frac{3x+1}{x^2+6x-7}$$

Graf funkcie lineárne lomenej zostrojujeme na základe vedomostí o funkcii nepriama úmernosť. Budeme pracovať **s asymptotami a ich priesečníkom**.

Ukážeme si jedno z možných riešení.

Príklad 2

Narysujte grafy funkcií, určte ich obory, monotónnosť, paritu, ohraničenosť, či je funkcia prostá.

a) $y = \frac{x+2}{x-1}$

b) $y = \frac{1-x}{x+2}$

c) $y = \frac{x}{2x-1}$

d) $y = \frac{3x+2}{x-4}$

Riešenie:

a)

Ak chceme nakresliť graf lineárne lomenej funkcie $y = \frac{x+2}{x-1}$, je dobré pripomenúť si, čo

vieme o grafe funkcie nepriama úmernosť $y = \frac{k}{x}$. Vieme, že ho tvoria **dve asymptoty**

$x = 0$, $y = 0$, ktoré sa pretínajú v **bode** $O[0;0]$ a grafom je **hyperbola** pre $D = R - \{0\}$ v závislosti od **koefficientu** k v 1. a 3. kvadrante alebo v 2. a 4. kvadrante.

Takže postup riešenia úlohy bude:

- Určiť asymptoty – nakresliť si ich do sústavy súradníc.
- Určiť priesečník asymptot (stred hyperboly).
- Vyznačiť vetvy hyperboly podľa koefficientu k .

Určenie asymptot (použijeme označenie a_1 a a_2)

Prvá asymptota a_1 (x – ová) sa určuje z podmienky pre lomený výraz.

podmienka

$$x-1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

asymptota

$$a_1 : x = 1$$

Druhá asymptota a_2 (y – ová) sa určuje z podielu, ktorým je tvorený lomený výraz.

Ukážeme si dva spôsoby ako túto asymptotu môžeme vypočítať.

1.spôsob:

$$y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$$

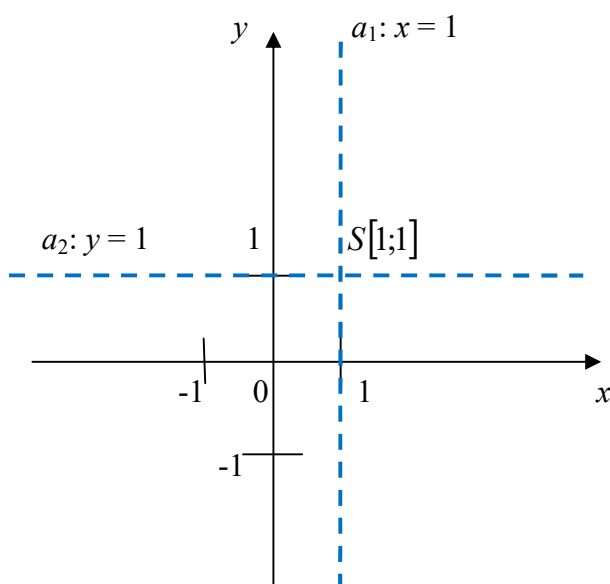
Druhá asymptota je $a_2: y=1$

2.spôsob:

$$\begin{array}{r} (x+2):(x-1)=1 \\ -(x-1) \\ \hline 3 \end{array}$$

Delíme $x : x = 1$.

Potom $y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$.



Priesečník je $S[1;1]$, jeho súradnice **tvoria hodnoty asymptot**.

Teraz určíme polohu vetiev hyperboly a to podľa vlastnosti funkcie nepriama úmernosť.

Pripomeňme si:

Pre funkciu nepriamej úmernosti $y = \frac{k}{x}$, platí:

Ak **k** je **kladné** číslo, funkcia je na definičnom obore **klesajúca** a **graf leží v 1. a 3. kvadrante**.

Ak **k** je **záporné** číslo, funkcia je na definičnom obore **rastúca** a **graf leží v 2. a 4. kvadrante**.

Určíme **koeficient k** a **polohu vetiev hyperboly**.

$$y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$$

$$k = 3 > 0$$

Funkcia je klesajúca, takže vetvy hyperboly budú ležať v **1. a 3. kvadrante**.

Namiesto určovania **koeficientu k** môžeme **polohu vetiev hyperboly** určiť pomocou priesečníkov grafu funkcie s osami x a y :

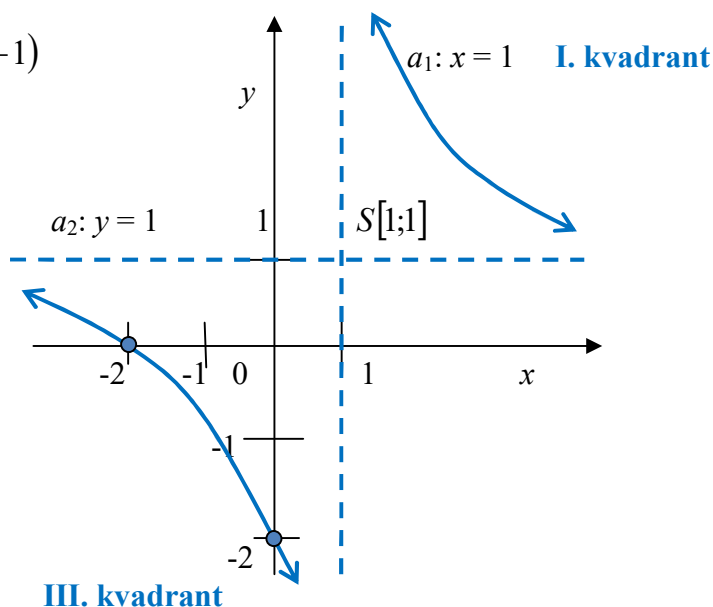
$$x = 0 : y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{0+2}{0-1} = -2$$

$$y = 0 : y = \frac{x+2}{x-1}$$

$$0 = \frac{x+2}{x-1} \quad / \cdot (x-1)$$

$$0 = x+2$$

$$x = -2$$



Nakreslili sme najprv nulové body, nimi sme viedli jednu z vetiev hyperboly a potom sme symetricky zostrojili druhú vetvu hyperboly.

$D(f)$	$H(f)$	Ohr. dolné	Ohr. horné	Rastúca pre x	Klesajúca pre x	Párna	Nepárna	Prostá
$R - \{1\}$	$R - \{1\}$	Nemá.	Nemá.	Nie je.	$R - \{1\}$	Nie je.	Nie je.	Je.

Poznámka:

Funkcia **je párna**, ak je jej graf symetrický podľa osi y .

Funkcia **je nepárna**, ak je jej graf symetrický podľa začiatku sústavy súradníc – bodu $0[0;0]$.

Funkcia **je prostá** vtedy, ak je na celom definičnom obore **len rastúca**, alebo **len klesajúca**.

V ďalších úlohách nebudeme vždy kresliť grafy, určíme si však všetky potrebné prvky pre jeho zostrojenie.

Graf sa dá zostrojiť presnejšie v grafických editoroch (používam DESMOS).

b) $y = \frac{1-x}{x+2}$

Určíme:

- asymptoty
- priesečník asymptot
- umiestnenie vetiev hyperboly

Určenie asymptot

a_1 : podmienka pre výraz

$$\begin{aligned} x+2 &\neq 0 \\ x &\neq -2 \end{aligned}$$

asymptota

$$a_1: x = -2$$

a_2 : Znovu si ukážeme dva spôsoby ako túto asymptotu vypočítať.

1.spôsob:

- 1

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-x}{x+2} = \frac{-1 \cdot (x-1)}{x+2} = -\frac{x-1}{x+2} = -\frac{x+2-3}{x+2} = -\left(\frac{x+2}{x+2} + \frac{-3}{x+2}\right) = -\left(1 - \frac{3}{x+2}\right) = \\ &= -1 + \frac{3}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1 \end{aligned}$$

Druhá asymptota je $a_2: y = -1$

2.spôsob:

$$\begin{array}{r} (1-x):(x+2) = -1 \\ -(-x-2) \\ \hline 3 \end{array}$$

Delíme $-x : x = -1$.

Priesečník je $S[-2; -1]$, jeho súradnice tvoria hodnoty asymptot.

Určíme koeficient k a polohu vetiev hyperboly.

$$y = \frac{3}{x+2} - 1 \quad k = 3 \quad 3 > 0$$

Funkcia je klesajúca, takže vetvy hyperboly budú ležať v 1. a 3. kvadrante.

Poznámka: určite ste si všimli pri určovaní druhej asymptoty, že stačí deliť „x“ z čitateľa a menovateľa.

$$c) y = \frac{x}{2x-1}$$

Určenie asymptot

a₁: podmienka pre výraz

$$\begin{aligned} 2x-1 &\neq 0 \\ x &\neq 0,5 \end{aligned}$$

asymptota

$$a_1 : x = 0,5$$

a₂: Určenie druhej asymptoty si ukážeme len delením „x“, preto lebo v menovateli je násobok x.

Delíme ich v poradí (**čitateľ** : **menovateľ**) .

$$\text{Delíme } x : (2x) = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = 0,5$$

asymptota

$$a_2 : y = 0,5$$

Priesečník je $S[0,5;0,5]$, jeho súradnice **tvoria hodnoty asymptot**.

Namiesto koeficientu **k** **polohu vetiev hyperboly** určíme pomocou priesečníkov:

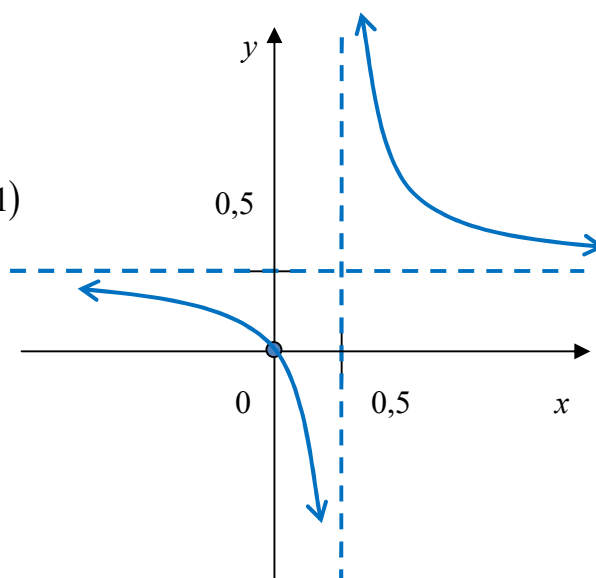
$$x = 0 : y = \frac{x}{2x-1} = \frac{0}{2 \cdot 0 - 1} = 0$$

$$y = 0 : y = \frac{x}{2x-1}$$

$$0 = \frac{x}{2x-1} \quad / \cdot (2x-1)$$

$$0 = x$$

$$x = 0$$



Poznámka: priesečníky sú rovnaké, získali sme jeden bod. Cez tento bod vedieme prvú vetvu hyperboly a druhú zostrojíme symetricky.

$D(f)$	$H(f)$	Ohr. dolné	Ohr. horné	Rastúca pre x	Klesajúca pre x	Párna	Nepárna	Prostá
$R - \{0,5\}$	$R - \{0,5\}$	Nemá.	Nemá.	Nie je.	$R - \{0,5\}$	Nie je.	Nie je.	Je.

d) $y = \frac{3x+2}{x-4}$

Určenie asymptot

a_1 : podmienka pre výraz

asymptota

$$\begin{aligned} x-4 &\neq 0 \\ x &\neq 4 \end{aligned}$$

$$a_1: x = 4$$

a_2 : Určenie druhej asymptoty si ukážeme len delením „ x “, preto lebo v čitateli je násobok x .

Delíme ich v poradí (čítateľ : menovateľ) .

$$\text{Delíme } (3x) : (x) = \frac{3x}{x} = 3$$

asymptota

$$a_2: y = 3$$

Priesečník je $S[4;3]$, jeho súradnice tvoria hodnoty asymptot.

Namiesto koeficientu k polohu vetiev hyperboly určíme pomocou priesečníkov:

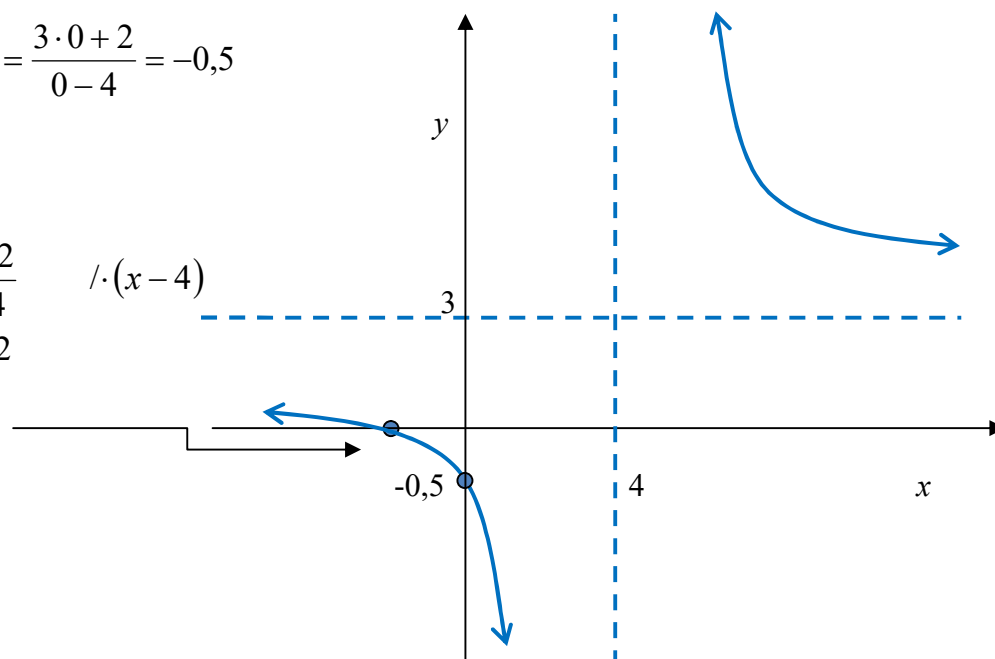
$$x = 0: y = \frac{3x+2}{x-4} = \frac{3 \cdot 0 + 2}{0 - 4} = -0,5$$

$$y = 0: y = \frac{3x+2}{x-4}$$

$$0 = \frac{3x+2}{x-4} \quad / \cdot (x-4)$$

$$0 = 3x+2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$



$D(f)$	$H(f)$	Ohr. dolné	Ohr. horné	Rastúca pre x	Klesajúca pre x	Párna	Nepárna	Prostá
$R - \{4\}$	$R - \{3\}$	Nemá.	Nemá.	Nie je.	$R - \{4\}$	Nie je.	Nie je.	Je.

Cvičenie 2

Narysujte grafy funkcií, určte ich obory, monotónnosť, paritu, ohraničenosť, či je funkcia prostá.

a) $y = \frac{x}{x+1}$

b) $y = \frac{4x}{x-2}$

c) $y = \frac{x-3}{2x+4}$

d) $y = \frac{5x+1}{2x-1}$

Cvičenie 3

3.1 Zistite, či body $A[3;0,75]$, $B[-1;0]$ patria do grafu funkcie $f : y = \frac{x}{x+1}$.

Poznámka: Vypočítajte hodnotu y pre prvú súradnicu x z daných bodov a potom porovnajte.

3.2 Napíšte druhú súradnicu bodu $A[-5; y]$ tak, aby bol bodom grafu funkcie

$$f : y = \frac{x-3}{2x}.$$

3.3 Napíšte prvú súradnicu bodu $B\left[x; \frac{2}{3}\right]$ tak, aby bol bodom grafu funkcie

$$g : y = -\frac{1-x}{3x+2}.$$

Na precvičenie učiva môžete použiť Zbierku 1, str. 287/8.2.7 – 8.2.8

**Ak si chcete overiť správnosť riešenia úloh, napíšte mi
viera.kolbaska@spsehalova.sk**