

Pracovný list Uhol dvoch vektorov v E2

Čo potrebujeme vedieť z predchádzajúcich ročníkov na to, aby sme vypočítali veľkosť uhla dvoch vektorov?

Zopakujme si:

Uhol – vrchol uhla, ramená uhla

Označenie uhla – trojicou bodov, gréckymi písmenami

Druhy uhlov – ostrý, tupý, vypuklý, pravý, priamy, plný

Miera uhla – stupňová (stupne, minúty, sekundy) a oblúčková (radiány)

Goniometrické funkcie uhla v pravouhlom trojuholníku (sínus – pomer protiľahlej odvesny ku preponě, kosínus uhla – pomer priľahlej odvesny k preponě, tangens – pomer protiľahlej odvesny k priľahlej odvesne, kotangens – pomer priľahlej odvesny k protiľahlej odvesne)

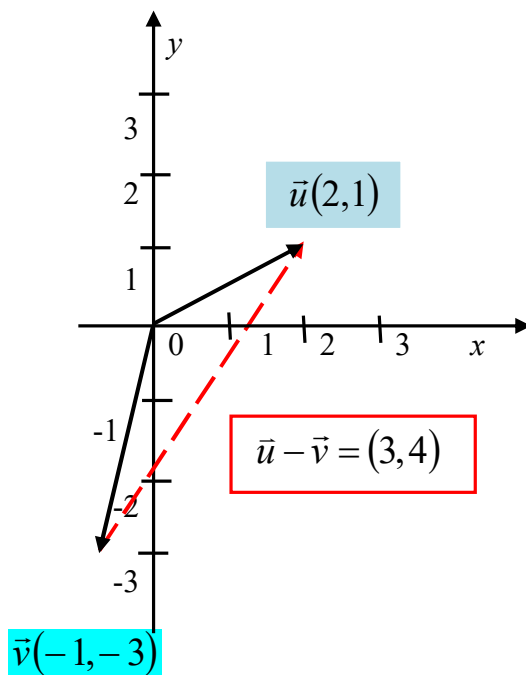
Riešenie pravouhlého trojuholníka (Pytagorova veta, sínusová a kosínusová veta, goniometrické funkcie)

Vektor – súradnice vektora a dĺžka (veľkosť) vektora, súčet a rozdiel vektorov.

Ukážeme si, ako vypočítať uhol vektorov **len pomocou vedomostí uvedených vyššie**.

ÚLOHA 1 Vypočítajte uhol vektorov $\vec{u}(2,1)$ a $\vec{v}(-1,-3)$.

RIEŠENIE: Najprv si dané vektory narysujeme do sústavy súradníc. Zároveň zostrojíme rozdiel týchto vektorov.



Určime si súradnice rozdielu vektorov $\vec{u} - \vec{v}$.

Platí $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$, takže $\vec{u} - \vec{v} = (3, 4)$.

Vypočítajme teraz dĺžky (veľkosti) všetkých troch vektorov.

Získame tak **dĺžky strán trojuholníka** a potom pomocou kosínusovej vety vypočítame veľkosť uhla vektorov $\vec{u}(2, 1)$ a $\vec{v}(-1, -3)$.

Dĺžku (veľkosť) vektorov počítame pomocou vzorca, ktorý sme odvodili zo vzťahu Pytagorovej vety.

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Kosínusová veta pre tento trojuholník sa dá zapísať vzťahom:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$$

$$\text{Z neho } \cos \varphi = \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2}{2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Dosadíme vypočítané hodnoty (dĺžky vektorov) to druhého vzťahu.

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}^2 + \sqrt{10}^2 - 5^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5 + 10 - 25}{2 \cdot \sqrt{50}} = \frac{-10}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{25}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Funkcia kosínus nadobúda záporné hodnoty v druhom a treťom kvadrante, takže uhol medzi vektormi môže nadobúdať hodnoty v druhom kvadrante $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ a v treťom kvadrante $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$.

Vzhľadom na riešenie trojuholníka, v ktorom súčet veľkostí vnútorných uhlov je 180° , veľkosť uhla medzi vektormi bude 135° .

Teraz si túto úlohu vypočítajme podľa vzorca uvedeného v tabuľkách.

Pre veľkosť uhla φ dvoch vektorov $\vec{u}(u_1, u_2)$ a $\vec{v}(v_1, v_2)$ platí:

$$\cos \varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Po dosadení súradníc vektorov $\vec{u}(2,1)$ a $\vec{v}(-1,-3)$ získame:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}}$$

Potom:

$$\cos \varphi = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-5}{\sqrt{50}} = \frac{-5}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Veľkosť uhla medzi vektormi bude 135° .

Čo môžeme povedať o takomto výpočte veľkosti uhla? ... je lepšie si tento vzorec zapamätať a používať...

A ČO VIEME O ČITATEĽOVI A MENOVAŤEĽOVI

vo vzorci pre výpočet veľkosti uhla dvoch vektorov?

Výraz $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$ **nazývame skalárny súčin vektorov**.

Odmocniny sú vzorce na výpočet dĺžok (veľkostí) vektorov:

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\vec{u}|$$

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |\vec{v}|$$

Vyriešte si teraz nasledujúce cvičenia.

Želám Vám veľa úspechov.

Cvičenie 1

- a) Vypočítajte uhol vektorov $\vec{w}(-2, -1)$ a $\vec{z}(1, 3)$.
- b) Vypočítajte uhol vektorov $\vec{u}(\sqrt{2}, -1)$ a $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Cvičenie 2

- a) Vypočítajte uhol vektorov $\vec{u} = \overrightarrow{EF}$ a $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, ak:
 $E[3, -1], F[0, 3], C[4, 0], D[4, 2]$.
- b) Vypočítajte uhol vektorov $\vec{a} = \overrightarrow{KL}$ a $\vec{b} = \overrightarrow{MN}$, ak:
 $K[4, -2], L[0, 3], M[-4, 0], N[2, 4]$.

Cvičenie 3

- a) Zistite, či sú vektory $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ a $\vec{v}(-0,12; 1,2)$ na seba kolmé.
Svoje tvrdenie odôvodnite.
- b) Zistite, či sú vektory $\vec{u}(0,8; -\frac{3}{4})$ a $\vec{v}\left(\frac{2}{5}; 0,75\right)$ na seba kolmé.
Svoje tvrdenie odôvodnite.

Cvičenie 4

- a) Vypočítajte uhol, ktorý zvierajú strany a a b v trojuholníku ABC .
 $A[-4, 2], B[5, 0], C[2, 4]$
- b) Vypočítajte uhol, ktorý zvierajú strany c a b v lichobežníku $ABCD$.
 $A[-3, 0], B[5, 0], C[2, 4], D[0, 4]$

Ak chcete vedieť výsledky cvičení, napíšte viera.kolbaská@gmail.com.

