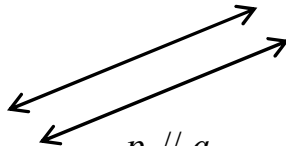
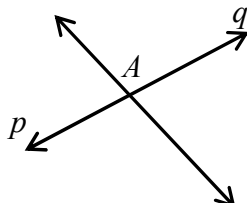


Vzájomná poloha priamok v analytickej geometrii

O vzájomnej polohe priamok v dvojrozmernom priestore – v rovine sme sa už učili.

Vzájomnú polohu sme určovali podľa počtu spoločných bodov.

Pripomeňme si poznatky z tejto oblasti tabuľkou.

Opis polohy dvoch priamok v rovine podľa počtu spoločných bodov	Matematický zápis polohy
Priamky sú totožné (rovnobežné splývajúce). Priamky majú nekonečný počet spoločných bodov .	 $p = q \quad \text{alebo} \quad p \equiv q$ $p \cap q = p = q$
Priamky sú rovnobežné (rovnobežné rôzne). Priamky nemajú spoločné body .	 $p \parallel q$ $p \cap q = \emptyset$
Priamky sú rôznobežné . Priamky majú spoločný práve jeden bod , ktorý nazývame priesečník .	 $p \not\parallel q$ $A \in p \cap q$

Aj v **analytickej geometrii** vzájomnú polohu určujeme **pomocou počtu spoločných bodov**, ale máme aj inú možnosť.

Vzájomnú polohu môžeme opísať aj **pomocou vektorov (smerových, normálových)** a **uhla**, ktorý priamky zvierajú (uhol určujeme ho pomocou vektorov, hlavne v prípade, keď zisťujeme kolmosť priamok).

Ukážeme si zatiaľ dva spôsoby.

Príklad 1

Zistite, či sú priamky $p : 2x - 5y - 4 = 0$ a $q : y = 4x - 8$ **rôznobežné**.

Riešenie:

Rôznobežnosť určíme pomocou **počtu spoločných bodov**. Určovanie počtu spoločných bodov realizujeme riešením **sústavy rovníc**, ktorými sú dané obe priamky. **Spoločný bod – jeho súradnice – musia vyhovovať obom priamkam.**

Sústavu môžeme riešiť rôznym spôsobom:

- dosadzovacou metódou
- sčítacou metódou
- determinantmi matíc

My budeme používať sčítaciu metódu.

$$\begin{aligned} p : 2x - 5y - 4 &= 0 \\ q : y &= 4x - 8 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 4 \\ -4x + y &= -8 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 2x - 5y = 4 \\ -20x + 5y = -40 \\ \hline 2x - 20x = 4 - 40 \end{array}$$

$$-18x = -36$$

$$x = 2$$

Obe rovnice priamok upravíme tak, aby „*na ľavej strane boli premenné a na pravej konštanty*“.

Aby sa **sčítaním rovníc odstránila jedna premenná**, musíme rovnice upraviť.

Ak chceme odstrániť y , tak musíme druhú rovnicu **vynásobiť číslom 5**.

Rovnice môžeme sčítat',
lebo $-5y + 5y = 0$

Sústava má **jedno riešenie**, priamky sú **rôznobežné**.

Ak chceme určiť **spoločný bod (priesečník)**, počítame aj **druhú premennú**.

Dosadíme vypočítanú hodnotu x do niektorej z rovníc priamok. Vhodná je priamka q .

$$q : y = 4x - 8 \longrightarrow y = 4 \cdot 2 - 8 = 8 - 8 = 0 \longrightarrow \text{Priesečník je } A[2;0].$$

Poznámka:

Priamka $p: 2x - 5y - 4 = 0$ bola určená **všeobecnou rovnicou**.

Priamka $q: y = 4x - 8$ bola určená **smernicovou rovnicou**.

Príklad 2

Zistite, či sú priamky $p: 3x + y - 5 = 0$, $q: 6x + 2y + 7 = 0$ **rovnobežné**.

Riešenie:

Ravnobežnosť určíme najprv pomocou **počtu spoločných bodov**.

Budeme riešiť **sústavu rovníc**.

$$p: 3x + y - 5 = 0 \quad / + 5$$

$$q: 6x + 2y + 7 = 0 \quad / - 7$$

$$p: 3x + y = 5 \quad / \cdot (-2)$$

$$q: 6x + 2y = -7$$

$$p: -6x - 2y = -10$$

$$q: 6x + 2y = -7$$

$$0 + 0 = -17$$

$$0 = -17$$

Rovnice môžeme sčítať.

Pri riešení sústavy vyšla **nepravdivá rovnosť**, sústava **nemá riešenie**, **neexistujú spoločné body týchto priamok**, a tak sú priamky **rovnobežné rôzne**.

Príklad 3

Zistite, či sú priamky $p: y = 2x - 3$, $q: 4x - 2y - 6 = 0$ **totožné**.

Riešenie:

Totožnosť určíme taktiež pomocou **počtu spoločných bodov**.

Budeme riešiť **sústavu rovníc**.

$$p: y = 2x - 3 \quad / - 2x$$

$$q: 4x - 2y - 6 = 0 \quad / + 6$$

$$p: -2x + y = -3 \quad / \cdot 2$$

$$q: 4x - 2y = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} p: -4x + 2y = -6 \\ q: 4x - 2y = 6 \end{array} \right\} \text{Rovnice môžeme sčítať.}$$

$$0x + 0y = -6 + 6$$

$$0 = 0$$

Pri riešení sústavy vyšla **pravdivá rovnosť**, sústava **má nekonečne veľa riešení**, priamky **majú nekonečne veľa spoločných bodov**, a tak sú priamky **totožné**.

Pozrime sa teraz **na iný spôsob riešenia úloh na vzájomnú polohu priamok, na vektory**, ktoré vieme odčítat' z uvedených priamok.

Informácie si vložme do tabuľky.

Príklad	Všeobecné rovnice priamok	Normálové vektory $n(a; b)$	Vzt'ah medzi vektormi	Absolútny člen c	Vzájomná poloha priamok
1	$p: 2x - 5y - 4 = 0$	$\vec{n}_p(2; -5)$	Sú lineárne nezávislé.	-4	Sú rôznobežné.
	$q: -4x + y + 8 = 0$	$\vec{n}_q(-4; 1)$		8	
2	$p: 3x + y - 5 = 0$	$\vec{n}_p(3; 1)$	Sú lineárne závislé: $\vec{n}_q = 2 \cdot \vec{n}_p$	Ak q vydělíme 2, potom $c_q = 3,5$ $c_p = -5$ Koeficienty sú rôzne .	Sú rovnobežné rôzne.
	$q: 6x + 2y + 7 = 0$	$\vec{n}_q(6; 2)$			
3	$p: -2x + y + 3 = 0$	$\vec{n}_p(-2; 1)$	Sú lineárne závislé: $\vec{n}_q = -2 \cdot \vec{n}_p$	Ak q vydělíme -2, potom $c_p = c_q = 3$ sú rovnaké .	Sú totožné.
	$q: 4x - 2y - 6 = 0$	$\vec{n}_q(4; -2)$			

Ak máme určiť vzájomnú polohu dvojice priamok pomocou vektorov, tak zist'ujeme, či sú vektory lineárne závislé alebo nezávislé. Ak sú vektory lineárne závislé, zist'ujeme aj hodnotu člena c všeobecných rovníc priamok $ax + by + c = 0$.

Príklad 4

Určte vzájomnú polohu priamky $p: x - 3y + 4 = 0$ a priamky danej parametrickými rovnicami $q: x = 1 - 5t; y = 3 + 2t$.

Riešenie:

I. Použijeme informácie z tabuľky a úlohu si vyriešime pomocou vektorov.

Potrebné výpočty:

1. Určenie normálových (alebo smerových) vektorov priamok.

$$p: x - 3y + 4 = 0 \quad \dots n_p(1; -3)$$

$q: x = 1 - 5t; y = 3 + 2t$ určíme smerový a potom

normálový vektor

$$u_q(-5; 2) \longrightarrow n_q(+2; 5)$$

Pre normálový a smerový vektor

priamky $ax + by + c = 0$ platí:

$n(a; b)$ normálový vektor

$u(-b; a)$ smerový vektor

2. Zistenie, či sú vektory lineárne závislé alebo nezávislé.

$$n_q(+2; 5) = k \cdot n_p(1; -3)$$

$$2 = k \cdot 1 \longrightarrow k = 2$$

$$5 = k \cdot (-3) \longrightarrow k = -\frac{5}{3}$$

$2 \neq -\frac{5}{3}$ vektory sú lineárne nezávislé

Keďže sú vektory lineárne nezávislé, priamky sú rôznobežné, určenie člena c nie je potrebné.

Poznámka:

Vo všeobecnej rovnici priamky sú normálové vektory.

V parametrických rovniciach sú smerové vektory priamky.

Je dôležité zapamätať si, že použiť pri riešení úlohy musíme vektory rovnakého druhu.

II. Teraz úlohu vyriešime pomocou počtu spoločných bodov (Príklady 1, 2, 3)

Riešime sústavu rovníc:

$$p: x - 3y + 4 = 0$$

$$q: x = 1 - 5t; y = 3 + 2t$$

Keďže rovnice priamok sú rôzneho typu, použijeme dosadenie $x = 1 - 5t$ a $y = 3 + 2t$ z priamky q do priamky $p: x - 3y + 4 = 0$.

$$\begin{array}{l}
 x = 1 - 5t \quad y = 3 + 2t \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 p: x - 3y + 4 = 0 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 (1 - 5t) - 3 \cdot (3 + 2t) + 4 = 0 \quad \text{Riešime rovnicu s neznámou } t. \\
 1 - 5t - 9 - 6t + 4 = 0 \\
 -11t - 4 = 0 \\
 t = -\frac{4}{11}
 \end{array}$$

Keďže t je číslo rôzne od 0, priamky **sú rôznobežné** a ak chceme určiť ich **priesečník**, tak dosadíme t do parametrických rovníc priamky q .

$$x = 1 - 5t = 1 - 5 \cdot \left(-\frac{4}{11}\right) = 1 + \frac{20}{11} = \frac{11 + 20}{11} = \frac{31}{11}$$

$$y = 3 + 2t = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{4}{11}\right) = 3 - \frac{8}{11} = \frac{33 - 8}{11} = \frac{25}{11}$$

Priesečníkom priamok je bod $P\left[\frac{31}{11}; \frac{25}{11}\right]$.

Príklad 5

Určte **vzájomnú polohu** daných priamok.

$$p: -12x + 6y + 15 = 0$$

$$q: 8x - 4y + 6 = 0$$

$$r: 4x - 2y - 5 = 0$$

$$s: x + 2y + 3 = 0$$

Riešenie:

Pri riešení tejto úlohy je vhodné použiť vzťahy medzi **normálovými vektormi** daných priamok. Zaujímaj nás bude, či sú **vektory lineárne závislé** alebo **nezávislé**.

Pri zisťovaní, či sú dvojice vektorov lineárne závislé alebo nezávislé, sme zisťovali, či jeden z vektorov je **násobkom** druhého vektora.

My si urýchlíme riešenie tohto vzťahu tak, že rovnice priamok **podelíme najväčším spoločným deliteľom** násobkov x a y (tzn. súradníc normálových vektorov; a a b v rovnici $ax + by + c = 0$).

$$p: -12x + 6y + 15 = 0 \quad / : (-6)$$

$$2x - y - 2,5 = 0 \Rightarrow n_p(2; -1)$$

$$q: 8x - 4y + 6 = 0 \quad / : 4$$

$$2x - y + 1,5 = 0 \Rightarrow n_q(2; -1)$$

$$r: 4x - 2y - 5 = 0 \quad / : 2$$

$$2x - y - 2,5 = 0 \Rightarrow n_r(2; -1)$$

$$s: x + 2y + 3 = 0 \Rightarrow n_s(1; 2)$$

Priamky p a q **sú rovnobežné rôzne:**

- majú rovnaké normálové vektory
- členy $-2,5 \neq 1,5$

Priamky q a r **sú rovnobežné rôzne:**

- majú rovnaké normálové vektory
- členy $-2,5 \neq 1,5$

Priamky p a r **sú totožné:**

- majú rovnaké normálové vektory
- členy $-2,5 = -2,5$

Priamka s **je rôznobežná so všetkými priamkami.**

Príklad 6

Určte vzájomnú polohu daných priamok. Ak sú rôznobežné, určte súradnice ich priesečníka.

$$p: \begin{aligned} x &= -3 + 5t \\ y &= 1 + 2t \end{aligned}$$

$$q: \begin{aligned} x &= -3 - s \\ y &= 2 + s \end{aligned}$$

Riešenie:

Väčšina študentov úlohu rieši tak, že si „*premenia parametrické rovnice priamok na všeobecné rovnice a určia počet spoločných bodov týchto priamok, tzn. riešia sústavu rovníc s neznámymi x a y* “.

$p:$

$$x = -3 + 5t \quad / \cdot 2$$

$$y = 1 + 2t \quad / \cdot (-5)$$

$$2x = -6 + 10t$$

$$-5y = -5 - 10t$$

$$2x - 5y = -11$$

$q:$

$$x = -3 - s$$

$$y = 2 + s$$

$$x + y = -1$$

Rovnice, ktoré sme získali „*nie sú úplne všeobecnými rovnicami*“, ale budeme riešiť sústavu rovníc a pre tú sú vhodné.

$$p: 2x - 5y = -11$$

$$q: x + y = -1 \quad / \cdot 5$$

$$2x - 5y = -11$$

$$5x + 5y = -5$$

$$7x = -16$$

$$x = -\frac{16}{7} \quad \text{Sústava bude mať len jedno riešenie, priamky sú preto rôznobežné.}$$

Máme zároveň **prvú súradnicu priesečníka**, určíme si ešte druhú súradnicu.

Druhú súradnicu určíme tak, že dosadíme do jednej z rovníc (vhodná je $q: x + y = -1$)

vypočítanú prvú súradnicu $x = -\frac{16}{7}$:

$$-\frac{16}{7} + y = -1 \quad / \cdot 7$$

$$-16 + 7y = -7 \quad / +16$$

$$7y = 9 \quad / :7$$

$$y = \frac{9}{7}$$

Súradnice priesečníka sú $x = -\frac{16}{7}$, $y = \frac{9}{7}$.

Na precvičenie učíva riešite úlohy zo zbierky 2:

str. 134/6.3.1, 6.3.2, 6.3.5

str. 135/6.3.6, 6.3.8, 6.3.9, 6.3.11

Ak budete mať problémy s riešením úloh, napíšte na mail:

viera.kolbaska@spsehalova.sk